УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМИ МАССАМИ

Е.Г. Янютин, профессор, д.т.н, П.А. Егоров, аспирант, ХНАДУ

Аннотация. *Приводятся решения прямой задачи для прямоугольной мембраны, несущей на своей поверхности одну и несколько (две) сосредоточенных масс, на которую воздействует поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка. Решение задачи сводится к анализу одного уравнения Вольтерра – в случае присоединения одной массы и системы уравнений Вольтерра – в случае присоединения нескольких масс.*

Ключевые слова: *мембрана, масса, нагрузка, контактная сила, перемещение, ряд Фурье, уравнение Вольтерра.*

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ З ПРИЄДНАНИМИ МАСАМИ

Є.Г. Янютін, професор, д.т.н, П.А. Єгоров, аспірант, ХНАДУ

Анотація. *Викладено розв'язки прямої задачі для прямокутної мембрани, яка несе на своїй поверхні одну й декілька (дві), зосереджених мас та сприймає поперечне зосереджене імпульсне навантаження. Розв'язок задачі зведений до аналізу одного рівняння Вольтера – у випадку приєднання однієї маси та системи рівнянь Вольтера – випадку приєднання декількох мас.*

Ключові слова: *мембрана, маса, навантаження, контактна сила, переміщення, ряд Фур'є, рівняння Вольтера.*

TRANSIENT OSCILLATIONS OF THE MEMBRANE WITH ATTACHED MASSES

E. Yanyutin, Professor, Doctor of Technical Science,
P. Yegorov, postgraduate, KhNAHU

Abstract. *The results of solution of a direct problem for the rectangular membrane carrying one or several (two) masses on its surface are given. Solution of this task Leads to the analysis of one Volterra equation if one mass and the system of Volterra equation in case if several masses are added.*

Key words: *membrane, mass, load, contact force, displacements, Fourier's series, Volterra equation.*

Введение

При построении математических моделей сложных механических систем, подверженных нестационарным колебаниям, иногда удобно на основе некоторой теории рассматривать основной объект исследования, а инерционное влияние контактирующих с ним объектов моделировать при помощи присоединенных масс. Указанное относится и к прямоугольным мембранам. В настоящей статье на основе [1] получено решение задачи математической физики для прямоугольной мембраны, несущей одну и несколько сосредоточенных масс.

Анализ публикаций

Исследованию нестационарных колебаний мембран посвящено значительное количество работ. В [1] получены уравнения свободных и вынужденных колебаний мембран.

Достаточно полно изучались нестационарные колебания прямоугольных мембран, не несущих массы, в монографии [2]. Причем в [2] были рассмотрены постановки и решения как прямых, так и обратных задач. В [3] было рассмотрено воздействие сосредоточенной нестационарной нагрузки на мембрану-полосу. К настоящему же времени способы определения колебаний мембран, на которых находятся сосредоточенные массы, развиты недостаточно хорошо.

Мембрана с одной присоединенной массой

Механическая система состоит из прямоугольной мембраны и присоединенной сосредоточенной массы. К поверхности мембраны прикладывается поперечная импульсная сосредоточенная нагрузка, которая вызывает ее нестационарные колебания (рис.1).

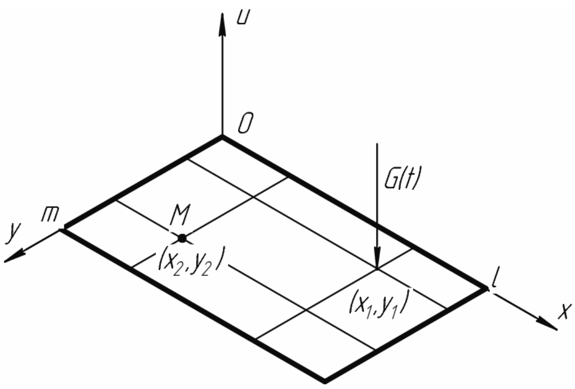

Рис. 1. Схема нагружения мембраны с одной присоединенной массой

Решение задачи сводится к анализу известного двухмерного волнового уравнения [1], в котором также учтем влияние сосредоточенной массы на колебательный процесс. Упомянутое уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G(x_1, y_1, t) + R(x_2, y_2, t), \quad (1)$$

где a – скорость распространения волн деформации;

$G(x_1, y_1, t) = \frac{1}{\rho}\delta(x - x_1)\delta(y - y_1)G(t)$ – внешняя возмущающая нагрузка, сосредоточенная в точке с координатами x_1, y_1;

$R(x_2, y_2, t) = \frac{1}{\rho}\delta(x - x_2)\delta(y - y_2)R(t)$ – контактная сила, возникающая от действия массы, сосредоточенная в точке с координатами x_2, y_2, где ρ – поверхностная плотность материала, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Соответствующую задачу математической физики, включающую дифференциальное уравнение (1), решаем с учетом нулевых начальных и краевых условий (отвечающих закреплению границы мембраны) посредством разложения искомой функции $u(x, y, t)$ в двойные ряды Фурье [1]. Решение сформулированной задачи получим в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \times \sin\left(\lambda_{k,n}(t - \tau)\right) d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R(\tau) \times \sin\left(\lambda_{k,n}(t - \tau)\right) d\tau \right) \sin\frac{k\pi x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi y}{m} \right) \quad (2)$$

где $C_{1k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin\frac{k\pi x_1}{l} \cdot \sin\frac{n\pi y_1}{m}$,

$C_{2k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin\frac{k\pi x_2}{l} \cdot \sin\frac{n\pi y_2}{m}$,

$\lambda_{k,n} = a \cdot \pi \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$.

Влияние массы учитывается функцией $R(x, y, t)$, входящей в (2), которая определяется из равенства перемещений массы перемещениям точки мембраны под массой, то есть

$$u_M(t) = u(x_2, y_2, t). \quad (3)$$

Перемещения условно отсоединенной от мембраны массы определяются из дифференциального уравнения, составленного на основании второго закона Ньютона

$$M \cdot u''_M(t) = -R(t). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) запишем в виде

$$u_M(t) = -\frac{1}{M} \cdot \int_0^t (t - \tau) R(\tau) d\tau. \quad (5)$$

На основании равенства (3) получаем интегральное уравнение Вольтерра для функции $R(t)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\times\right.$$
$$\left.\times\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\right)=\int_0^t R(\tau)\left(-\frac{t-\tau}{M}-\right.$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\right)\right)d\tau. \qquad (6)$$

Приняв следующие обозначения,

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\right),\ K(t-\tau)=-\frac{t-\tau}{M}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\right),$$

приведем уравнение (6) к стандартному виду $f(t)=\int_0^t R(t)\cdot K(t-\tau)d\tau$. Использовав замену интеграла конечной суммой [2, 4], будем иметь

$$f_j=\sum_{p=1}^{j}R_p\int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t}K(t_j-\tau)d\tau,\ (j=1,2,...,J). \quad (7)$$

Решение уравнения (7) получим относительно неизвестных R_j в виде

$$R_j=\frac{f_j-\sum_{p=1}^{j-1}R_p\int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t}K(t_j-\tau)d\tau}{\int_0^{\Delta t}K(\tau)d\tau}, \qquad (8)$$
$$(j=1,2,...,J).$$

При известных величинах, входящих в уравнение (2), можно рассчитать значения прогибов в любой точке мембраны с течением времени. В качестве примера рассмотрим такие исходные данные: поверхностная плотность материала мембраны $\rho=3{,}6$ кг/м^2, скорость распространения поперечных волн деформации $a=30$ м/с, габариты мембраны $l=0{,}6$ м, $m=0{,}4$ м, координаты точек приложения сосредоточенной силы и сосредоточенной массы $x_1=0{,}3$ м, $y_1=0{,}2$ м, $x_2=0{,}2$ м, $y_2=0{,}2$ м, величина присоединенной массы $M=10$ кг, интенсивность возмущающей нагрузки $q=100$ Н. Нагрузка во времени действует по закону «синуса» с циклической частотой колебаний $\omega_0=100$ с$^{-1}$. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье устанавливалось на основе численного эксперимента по определению сходимости рядов и было принято 100x100.

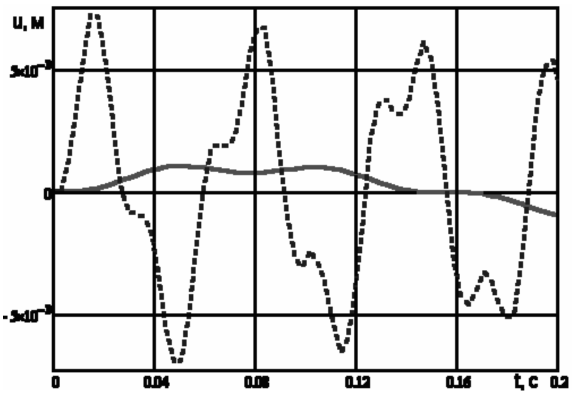

Рис. 2. Графики перемещений точки мембраны

На рис. 2 сплошной кривой соответствуют перемещения точки мембраны с координатами $x_2=0{,}2$ м, $y_2=0{,}2$ м при наличии присоединенной массы, пунктирной кривой – перемещения той же точки мембраны в предположении отсутствия на мембране сосредоточенной массы. Из рис. 2 следует, что наличие сосредоточенной массы на мембране существенно уменьшает амплитуду колебаний ее точек.

Мембрана с несколькими присоединенными массами

В случае присоединения нескольких разнесенных масс к поверхности мембраны следует рассматривать уравнение вида (1), в которое будут входить значения контактных сил в количестве, равном количеству присоединенных масс.

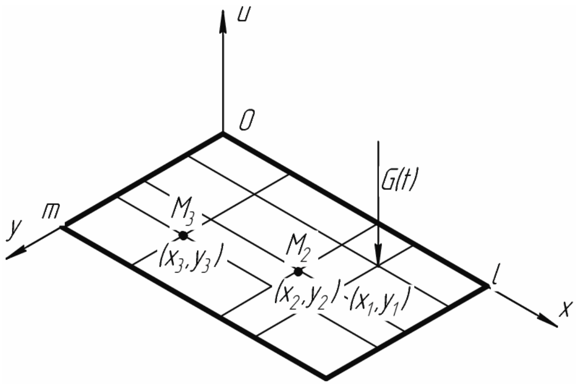

Рис. 3. Схема нагружения мембраны с несколькими (двумя) присоединенными массами

Рассмотрим случай, когда на поверхности мембраны располагаются две сосредоточенные массы: M_2 в точке с координатами x_2, y_2 и M_3 в точке с координатами x_3, y_3. Сосредоточенная возмущающая нагрузка, которая вызывает нестационарные колебания всей системы, во времени действует по закону «синуса» и приложена в точке x_1, y_1.

Решение задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны, несущей на себе две сосредоточенные массы, в случае воздействия на нее сосредоточенной силы при учете нулевых начальных условий будет выглядеть так

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\Bigg(&\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\cdot\int_0^t G(t)\times \\
&\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\cdot\int_0^t R_2(\tau)\times \\
&\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}}\cdot\int_0^t R_3(\tau)\times \\
&\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\Bigg)\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi y}{m}\Bigg).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Запишем систему интегральных уравнений для определения возникающих контактных сил. При составлении этой системы используются такие же физические предположения, как и при рассмотрении случая присоединения одной сосредоточенной массы.

Система интегральных уравнений такова

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&\int_0^t R_2(\tau)\Bigg(\frac{t-\tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\times \\
&\times\frac{C_{2k,n}\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)}{\lambda_{k,n}}\Bigg)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sin\frac{k\pi x_2}{l}\times \\
&\times sin\frac{n\pi y_2}{m}\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_3(\tau)\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\Bigg) = \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(t)\times \\
&\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau;
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sin\frac{k\pi x_3}{l}\sin\frac{n\pi y_3}{m}\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_2(\tau)\times \\
&\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau\Bigg) + \int_0^t R_3(\tau)\Bigg(\frac{t-\tau}{M_3} + \\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{3k,n}\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)}{\lambda_{k,n}}\sin\frac{k\pi x_3}{l}\times \\
&\times\sin\frac{n\pi y_3}{m}\Bigg)d\tau = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x_3}{l}\sin\frac{n\pi y_3}{m}\times \\
&\times\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(t)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)d\tau.
\end{aligned}
\end{cases} \tag{10}
$$

Уравнения Вольтерра, входящие в систему (10), как и в случае одной массы, будем решать численно, заменяя интегралы конечными суммами. Представляя систему уравнений (10) в матричном виде, получим

$$
\begin{cases}
\mathrm{R}_2\cdot\mathrm{A}_{11} + \mathrm{R}_3\cdot\mathrm{A}_{12} = \mathrm{f}_1; \\
\mathrm{R}_2\cdot\mathrm{A}_{21} + \mathrm{R}_3\cdot\mathrm{A}_{22} = \mathrm{f}_2,
\end{cases} \tag{11}
$$

где R_2 и R_3 – неизвестные векторы; A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} – матрицы, соответствующие ядрам уравнений системы (11); f_1 и f_2 – столбцы свободных членов.

Решение системы уравнений будем искать с помощью метода Крамера

$$
\mathrm{R}_2 = \frac{\begin{vmatrix}\mathrm{f}_1 & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{f}_2 & \mathrm{A}_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22}\end{vmatrix}}; \quad \mathrm{R}_3 = \frac{\begin{vmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{f}_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22}\end{vmatrix}}. \tag{12}
$$

Для построения графика перемещений точки мембраны в случае присоединения двух масс примем дополнительные исходные данные: величина присоединенной массы M_2, расположенной в точке с координатами $x_2 = 0{,}1$ м, $y_2 = 0{,}1$ м, равна 3 кг, величина присоединенной массы M_3, расположенной в точке с координатами $x_3 = 0{,}2$ м, $y_3 = 0{,}2$ м, равна 4 кг.

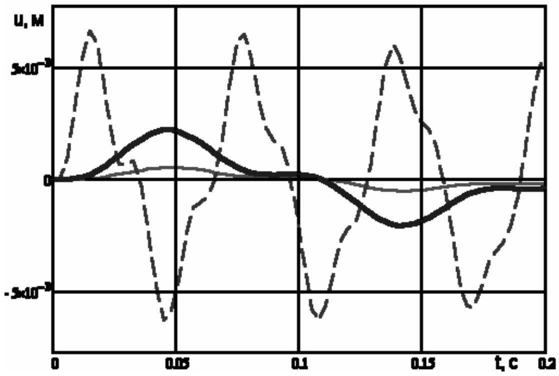

Рис. 4. Графики перемещений точек мембраны

На рис. 4 сплошной тонкой линии соответствуют перемещения точки мембраны под массой M_2, сплошной жирной линии – перемещения точки мембраны под массой M_3, а штриховой линии – перемещения точки с координатами $x = 0{,}4$ м, $y = 0{,}2$ м.

Из рис. 4 видно, что, как и в случае одной массы, наиболее сильное уменьшение амплитуды колебаний наблюдается в точках расположения масс.

Выводы

Рассмотренные в статье задачи относят к прямым задачам, когда при известных нагрузках, воздействующих на элементы конструкций, находят перемещения, деформации или напряжения в произвольной точке этого элемента конструкции. В данной статье получено решение задачи математической физики для случаев присоединения к поверхности мембраны одной и двух сосредоточенных масс. На основе данного подхода можно также получить решения задач для большего количества присоединенных масс.

Литература

1. Араманович И. Г. Уравнения математиче–ской физики / И. Г. Араманович, В. И. Ле–вин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
2. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций: монография / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воропай, А.С. Шарапата. – Х.: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Янютин Е.Г. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу / Е.Г. Янютин, Н.И. Кучерова // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 32. – С. 80 – 83.
4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Рецензент: М.А. Подригало, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2012 г.