УДК 531/534

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАТЕРИИ

А. В. Беловол, доц., к. т. н.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Рассмотрена возможность использования универсальных законов естествознания на примере закона сохранения материи как генераторов общих законов физики на примере законов релятивистской механики.*

Ключевые слова: *принцип относительности, фазовое пространство, канонические уравнения, теория относительности.*

ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ І ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МАТЕРІЇ

О. В. Біловол, доц., к. т. н.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Розглянуто можливість використання універсальних законів природознавства на прикладі закону збереження матерії як генераторів загальних законів фізики на прикладі законів релятивістської механіки.*

Ключові слова: *принцип відносності, фазовий простір, канонічні рівняння, теорія відносності.*

GENERAL RELATIVITY AND THE LAW OF MATTER PRESEVATION

A. Belovol, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),
Kharkiv National Automobile and Highway University

Abstract. *The possibility of using the universal law of nature science on example of the law of matter preservation as generators of the common law of physics on example of the law of general relativity is considered.*

Key words: *the principle of relativity, phase space, canonic equations, general relativity.*

Введение

Развитие науки приводит к тому, что математические модели физических явлений становятся все более абстрактными. Оказалось, что движение физических систем более естественно рассматривать не в физическом трехмерном пространстве, вмещающем материальные тела, а в многомерных или даже бесконечномерных пространствах. Это обычно связано с ограничениями частного или общего характера, налагаемыми на движение системы, или выбором системы координат. Так, ограничение на скорость распространения взаимодействий привело к введению четырехмерного пространства-времени, а применение обобщенных координат сделало целесообразным рассматрение движения системы в пространстве конфигураций.

Наиболее полно движение физической системы можно представить, рассматривая ее в виде сплошной среды в фазовом пространстве (пространстве состояний).

Фазовая среда по всем формальным признакам не отличается от материальной, и к ней можно применить закон сохранения материи в виде уравнения баланса некоторой физической величины плотности f

$$\frac{d}{dt}\int_V f dV = \int_S \mathbf{F} \cdot dS + \int_V j dV,$$

где $\mathbf{F}$ – поток величины через поверхность S частицы среды объемом V; j – интенсивность источника этой величины.

Закон сохранения материи в силу своей универсальности, как будет показано в дальнейшем, включает в себя принципы относительности и эквивалентности, которые считаются основополагающими принципами общей теории относительности.

Принцип относительности постулирует эквивалентность систем отсчета и тем самым инвариантность теории (функционала действия, уравнений движения, уравнений поля) относительно преобразований систем отсчета. Следует, однако, различать два рода преобразований – изменение системы отсчета и преобразование самой физической системы. Требование инвариантности относительно изменений системы отсчета кажется вполне естественным и даже тривиальным, тогда как инвариантность при преобразованиях самой физической системы, несомненно, несет информацию о ее свойствах. Закон сохранения материи в виде уравнения баланса в фазовом пространстве автоматически удовлетворяет инвариантности последнего рода.

Что касается принципа эквивалентности, то в силу общности подхода (масса материальной точки вводится как весовой коэффициент в метрике пространства конфигураций физической системы) нет необходимости различать инертную и гравитационную массу.

Анализ публикаций

В работе [1] проведен анализ роли, которую играют универсальные законы природы в современной науке, их взаимосвязи с общими законами физики. Рассмотрены различные формулировки закона сохранения материи и различные виды уравнений баланса физических субстанций как способов формализации последнего. Обоснована возможность применения закона сохранения материи в абстрактных пространствах.

В работе [2] получены канонические уравнения классической механики в фазовом пространстве на основе закона сохранения материи. Показаны преимущества матричного формализма при работе в многомерных пространствах.

Цель и постановка задачи

Цель исследования – получение уравнений релятивистской механики, исходя из конечности скорости распространения взаимодействия и закона сохранения материи. Движение частицы среды рассматривается как движение жидкости в фазовом пространстве с естественной метрикой. Естественная метрика отвечает метрике фазового пространства, составляющих частицу материальных точек. Уравнения движения фазовой жидкости и уравнения для метрического тензора получаются из закона сохранения материи в виде уравнений баланса.

Уравнения движения массивной частицы

Ограничение сверху скорости распространения взаимодействий в современной физике входит в формулировку принципа относительности Эйнштейна, согласно которому она представляет собой универсальную постоянную. Этой скоростью является скорость распространения света в пустоте c.

Универсальный характер скорости света математически можно учесть, если перейти к четырёхмерному пространству Минковского, где четвертая декартовая координата x_0 равна ct. Пространство Минковского следует рассматривать как пространство конфигурации одной материальной точки. Действительно, метрика пространства формально может быть достаточно произвольной, а по существу должна зависеть от рассматриваемой системы.

Так как материальная точка в пространстве конфигураций всегда находится в движении, то интервал между двумя мировыми точками следует рассматривать как интервал между двумя последовательными положениями материальной точки, который по аналогии с классической механикой естественно выбрать в виде

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{I}d\mathbf{x} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

где $d\mathbf{x}$ – столбец, составленный из дифференциалов координат точки, если стоит справа в произведении, или строка, если стоит слева, $\mathbf{I}$ – матрица вида

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знак «+» перед dx_0^2 отвечает тому, что материальная точка может в разные моменты времени занимать одно и то же положение в трехмерном пространстве, то есть квадрат интервала между ее положениями в четырехмерном пространстве должен быть положительным.

С другой стороны, материальная точка не может находиться одновременно в двух точках трехмерного пространства, поэтому соответствующий квадрат интервала отрицательный, то есть нефизичный.

Принимая во внимание, что интервал между двумя мировыми точками является мировым скаляром, можно ввести собственное время τ в соответствии с формулой

$$(d\tau)^2 = \frac{dl^2}{c^2}.$$

Рассмотрим движение системы материальных точек в пространстве-времени как движение сплошной среды. Разобьем среду на бесконечно малые объемы, которым будут отвечать точки с координатами, образующими вектор $\mathbf{q}$. Между положением точки среды и положением n материальных точек, из которых она состоит, существует неаналитическая, то есть зависящая от закона движения точек, связь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}),$$

где $\mathbf{x}$ – строка (столбец), составленная из координат точек частицы среды.

Интервал между ближайшими положениями системы n различных материальных точек в пространстве конфигураций можно ввести, используя квадратичную форму

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\mathbf{x},$$

где $d\mathbf{x}$ – столбец или строка из $4n$ координат точек системы, а $\mathbf{M}$ – диагональная матрица размером $4n \times 4n$, состоящая из блоков $m_k\mathbf{I}$, где m_k – масса k-той материальной точки в собственной системе координат (масса покоя).

В данном случае также можно ввести собственное время частицы среды τ по формуле

$$(d\tau)^2 = \frac{dl^2}{c^2 dm},$$

где dm – масса покоя частицы (сумма масс покоя всех точек, входящих в частицу).

Интервал между ближайшими положениями системы n материальных точек в фазовом пространстве получим, если возьмем производную по времени от метрики пространства конфигураций, отбросив постоянный множитель

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}d\mathbf{p},$$

где $d\mathbf{p} = \mathbf{M}d\dot{\mathbf{x}}$ – столбец дифференциалов импульсов точек.

Воспользовавшись собственным временем частицы τ, можно образовать векторы скорости точек, составляющих частицу среды, и самой частицы среды, которые связаны соотношением

$$v = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}},$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ – матрица преобразования координат размером 4 на $4n$.

Интервал между последовательными положениями частицы в пространстве конфигураций будет иметь вид

$$dl^2 = d\mathbf{q}\mathbf{I}d\mathbf{q},$$

где роль метрического тензора играет матрица

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Следует отметить, что введенный таким образом интервал между последовательными положениями изображающей точки в фазовом пространстве с геометрической точки зрения может рассматриваться как естественная метрика пространства конфигураций, которая изначально отражает свойства рассматриваемой механической системы.

Интервал в фазовом пространстве

$$ds^2 = d\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{p} = d\mathbf{q}d\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{p}\right) =$$

$$= d\mathbf{q}d\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{v}\right) = d\mathbf{q}d\left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}\right) =$$

$$= d\mathbf{q}d\left(\mathbf{I}\dot{\mathbf{q}}\right).$$

Выражение можно упростить, если ввести столбец (строку) $\mathbf{x}$, составленный из последовательно расположенных координат $\mathbf{q}$ и импульсов $\mathbf{p} = \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}}$ частицы. Получим

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора в пространстве конфигураций, которому отвечает матрица размером 8 на 8 вида

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать частицу среды как консервативную систему, то соответствующая ей фазовая жидкость является несжимаемой и дивергенция скорости фазовой жидкости равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Выбирая в качестве субстанции произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы фазовой жидкости на ее объем, запишем для нее уравнение баланса

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{x}dV\right) = \dot{\mathbf{x}}dV + \mathbf{x}d\dot{V} = \int \mathbf{H}d\mathbf{S} + \mathbf{J}.$$

Разделив обе части уравнения на объем частицы dV, получаем

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H} + \mathbf{j}\ ,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}$ – дивергенция тензора $\mathbf{H}$ размером 8 на 8; $\mathbf{j}$ – интенсивность источника.

Конкретный вид матрицы $\mathbf{H}$ и вектора $\mathbf{j}$ можно получить, исходя из однородности фазового пространства и инвариантности уравнений по отношению к выбору порядка координат, а также имея в виду консервативный характер механической системы. Так, однородность фазового пространства означает отсутствие источника в уравнении движения. Из консервативности системы можно сделать вывод об асимметричности матрицы $\mathbf{H}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H} = 0.$$

Для образования скаляра

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{G}d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}\mathbf{G}d\mathbf{x}$$

необходимо, чтобы матрица $\mathbf{HG}$ была диагональной, а матрица $\mathbf{H}$ имела, соответственно, клеточную структуру

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{D}$ – соответственно нулевая и диагональная матрицы размером 4 на 4.

Так как уравнения движения не должны зависеть от выбора порядка координат частицы, то все элементы матрицы $\mathbf{D}$ должны быть одинаковыми и равными H. Подставляем матрицу $\mathbf{H}$ в уравнение движения и получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$

где $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ – градиент функции H в фазовом пространстве, а матрица $\mathbf{B}$ – асимметричная матрица размером 8 на 8, которая имеет клеточную структуру

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ – соответственно нулевая и единичная матрица размером 4 на 4.

Если спроектировать уравнение движения на пространство конфигураций и на пространство импульсов частицы, то получим уравнения в каноническом виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Функция Гамильтона при этом должна иметь вид

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{2dm}\mathbf{p}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{p},$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{I}}{dm}$ представляют собой, с одной стороны, тензорный потенциал, а с другой – метрический тензор.

Последнее уравнение можно рассматривать как уравнение движения среды в эйлеровом представлении. Подставляя в него функцию Гамильтона и выражение для импульса частицы, а также разделив его на массу частицы, получаем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u}\Gamma\right)\mathbf{u} = 0,$$

где $\Gamma = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E}^2 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\right)$ – символ Кристофеля 2-го рода (здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица, которая играет роль оператора транспонирования); $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ – скорость частицы.

Переходя от псевдоэвклидовой к естественной метрике, т. е. считая координаты частицы криволинейными, введем оператор градиента в соответствии с формулой

$$\frac{d(\;)}{d\mathbf{q}} = \frac{\partial(\;)}{\partial \mathbf{q}} + (\;)\Gamma.$$

В этом случае уравнение движения принимает особенно простой вид

$$\dot{\mathbf{u}} = 0.$$

Учитывая закон сохранения массы частицы среды, получаем дивергенцию тензора энергии-импульса, равную нулю

$$\frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} + \rho\left(\mathbf{u}\frac{d}{d\mathbf{q}}\right)\mathbf{u} = \frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} + \rho\dot{\mathbf{u}} = 0,$$

где ρ – собственная плотность частицы.

Уравнение для тензорного потенциала

Для определения тензорного потенциала перейдем к естественной метрике. Выбирая в качестве плотности субстанции в пространстве конфигураций произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы на ее собственную плотность и скорость, запишем закон сохранения материи в виде уравнения баланса

$$\frac{d(\rho\mathbf{u}\mathbf{q}dV)}{d\tau} = \rho\mathbf{u}\mathbf{u}dV + \frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u}\mathbf{u})\mathbf{q}dV = \int \mathbf{F}d\mathbf{S} + \mathbf{J}.$$

Разделив обе части уравнения на собственный объем частицы среды в пространстве конфигураций, используя локальный закон сохранения для тензора энергии-импульса, получаем

$$\rho\mathbf{u}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{F} + \mathbf{j},$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{j}$ – тензоры третьего и второго порядка соответственно, составленные из тензорного потенциала (метрического тензора) и оператора градиента.

Легко проверить, что для метрического тензора выполняется условие метричности

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{q}} = 0.$$

Отсюда следует, что тензор третьего порядка $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Тензор второго порядка $\mathbf{j}$ можно получить путем сокращения тензора четвертого порядка. Для этого найдем выражение для тензора третьего прядка, двукратно действуя оператором градиента на произвольный вектор $\mathbf{a}$

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^1 d\mathbf{q}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^1}\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2}\right) + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2}\Gamma^1 - \Gamma^1\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^1}\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^2} + \mathbf{a}\Gamma^2\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^2} + \mathbf{a}\Gamma^2\right)\Gamma - \Gamma^1\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2} = \frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^1\partial \mathbf{q}^2} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^1}\Gamma^2 + \mathbf{a}\frac{\partial \Gamma^2}{\partial \mathbf{q}^1} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^2}\Gamma^1 + \mathbf{a}\Gamma^2\Gamma^1 - \Gamma^1\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2},$$

где индексы 1 и 2 отражают тот факт, что операция повторного дифференцирования некоммутативна

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^2 d\mathbf{q}^1} - \frac{d^2\mathbf{a}}{d\mathbf{q}^1 d\mathbf{q}^2} = \\ = \mathbf{a}\left(\frac{\partial\Gamma^1}{\partial\mathbf{q}^2} - \frac{\partial\Gamma^2}{\partial\mathbf{q}^1} + \Gamma^1\Gamma^2 - \Gamma^2\Gamma^1\right).$$

Очевидно, что выражение в скобках представляет собой тензор четвертого порядка (тензор кривизны). Переходя к обозначениям тензорного анализа, получаем

$$R^{\mu}_{\alpha\nu\sigma} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}}{\partial q^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}}{\partial q^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu},$$

где $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial q^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial q^{\sigma}}\right);$

$g^{\alpha\beta}$ представляют собой элементы матрицы $\mathbf{g}^{-1}$.

Сверткой первого и третьего индексов тензора кривизны можно образовать тензор второго ранга $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$, который называется тензором Риччи (остальные свертки дают тот же результат с точностью до знака). Свертывая далее тензор Риччи, получаем инвариант $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, называемый скалярной кривизной. Из полученных сокращений единственным образом (с точностью до постоянного множителя) можно составить тензор, который удовлетворяет локальному закону сохранения

$$\frac{d}{d\mathbf{q}}\mathbf{j} = 0.$$

Для его контравариантных компонент получаем

$$j^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\kappa}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right),$$

где $R^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\mu\nu}$.

Подставляя тензор $\mathbf{j}$ в выражение для тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha}u^{\beta}$, приходим к уравнениям Эйнштейна

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = -\kappa T^{\alpha\beta},$$

где κ называется эйнштейновской гравитационной постоянной.

Выводы

В работе показано, что законы релятивистской механики можно получить, рассматривая физическую систему в фазовом пространстве, исходя из закона сохранения материи и конечности скорости распространения взаимодействия. При этом метризация гравитационного поля вводится естественным путем как результат существования неаналитических связей внутри системы, а не рассматривается как следствие из принципа эквивалентности или как самостоятельный принцип. Псевдориманово пространство выступает в качестве абстрактного пространства, удобного для описания гравитационного поля.

Представлен еще один аргумент в подтверждение того, что универсальные законы природы могут служить генераторами общих физических законов.

Литература

1. Беловол А. В. Современная физика и универсальные законы естествознания / А. В. Беловол // Наука, техника и технология в постиндустриальном обществе: сб. науч. статей. – 2013 – С. 197–210.
2. Беловол А. В. Законы механики и универсальные законы природы / А. В. Беловол // Вестник ХНАДУ : сб. науч. тр. – 2013. – Вып. 60. – С. 148–153.

Рецензент: Ю. В. Батыгин, профессор, д. т. н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 25 марта 2014 г.