УДК 629.195

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

А.С. Назаров, доц., к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. *В статье решается задача управления движением транспортного средства. Рассмотрено аналитическое решение построения динамической математической модели упругого транспортного средства как системы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Были получены уравнения движения транспортного средства относительно его центра масс.*

Ключевые слова*: управление движением, транспортное средство, сосредоточенные и распределенные параметры.*

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ РУХОМ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

О.С. Назаров, доц., к.т.н., ХНАДУ

Анотація. *У статті вирішується завдання управління рухом транспортного засобу. Розглянуто аналітичне вирішення побудови динамічної математичної моделі пружного транспортного засобу як системи із зосередженими і розподіленими параметрами. Були отримані рівняння руху транспортного засобу відносно його центру мас.*

Ключові слова*: управління рухом, транспортний засіб, зосереджені та розподілені параметри.*

CALCULATION METHOD OF CONTROL SYSTEM BY MOTION OF TRANSPORT VEHICLE

Nazarov A.S., assistant professor, cand. eng. sc., KHNADU

Abstract. *The task of transport vehicle traffic control decides in the article. The analytical decision of construction of dynamic mathematical model of resilient transport vehicle as systems is considered with the concentrated and up-diffused parameters. Equalizations of transport vehicle motion were got in relation to his center-of-mass.*

Key words: *traffic control, transport vehicle, concentrated and up-diffused parameters.*

Вступ

Транспортні засоби функціонують в складних умовах, піддаються великим навантаженням і тому можуть бути дуже гнучкими. При цьому діючі навантаження, а також гравітація і прискорення, особливо в русі, можуть робити істотний вплив на пружні динамічні характеристики транспортних засобів і в результаті на їх динаміку. Динаміка сучасних транспортних засобів багато в чому залежить від вживаних технічних рішень [1], отриманих на основі прийнятої математичної моделі. Пружні конструкції застосовувалися вже на перших транспортних засобах для розміщення експериментальної апаратури, в якості гравітаційної стабілізації, антен зв'язку. Властивості пружної деформації конструкцій широко використовуються в сучасних транспортних засобах. Вирішуються завдання управління рухом пружного транспортного засобу: 1) отримання рівнянь руху транспортного засобу навколо його центру мас і вигинистих коливань; 2) вибір числа мод коливань, що враховуються; 3) спрощення математичної моделі пружного транспортного засобу.

Постановка задачі

Для виведення рівнянь збуреного руху пружного транспортного засобу скористаємося відомими теоремами динаміки про зміну кількості руху і кінетичного моменту системи [2]. При цьому рух центру мас транспортного засобу описуватиметься наступним рівнянням:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}, \tag{1}$$

де $\bar{K}$ - вектор кількості руху транспортного засобу з урахуванням пружних коливань; $\bar{F}$ - головний вектор зовнішніх сил, що діють на транспортний засіб. Рівняння руху транспортного засобу відносно центру мас можна записати у виді

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{M}, \tag{2}$$

де $\bar{G}$ – вектор моменту кількості руху транспортного засобу з урахуванням пружних коливань; $\bar{M}$ – головний вектор моменту зовнішніх сил. Рівняння (2) можна переписати, користуючись поняттям локальної похідної по відношенню до системи, в наступній формі:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\bar{G} + \bar{\omega} \times \bar{G} = \bar{M} + \bar{M}', \tag{3}$$

де $\bar{M}'$ – створюваний момент, що керує.
Схематизуємо конструкції у виді пружних неоднорідних балок, погонні масові, інерційні і жорсткі характеристики яких дорівнюють відповідним характеристикам. Що в цьому випадку становлять вектору кількості руху транспортного засобу можна записати таким чином:

$$Q_x = m\dot{x} + \sum_{k=1}^{2} \int_0^{l_k} m_k(\xi_k) u_{xk}(\xi_k, t)\, d\xi_k;$$

$$Q_y = m\dot{y} + \sum_{k=1}^{2} \int_0^{l_k} m_k(\xi_k) u_{yk}(\xi_k, t)\, d\xi_k;$$

$$Q_z = m\dot{z} + \sum_{k=1}^{2} \int_0^{l_k} m_k(\xi_k) u_{zk}(\xi_k, t)\, d\xi_k, \tag{4}$$

де m - маса; l_k - довжина балок; $m_k(\xi_k)$ - погонна маса балок; $u_{xk}(\bullet)$ - проекції швидкості точок k -ої балки.

Останні визначаються виразом виду

$$u_{xk}(\xi_k, t) = (-1)^k \dot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)\cos\alpha_k \cos\beta_k + $$
$$+ (-1)^{k+1} \dot{\phi}_{\varsigma k}(\xi_k, t)\sin\alpha_k \cos\beta_k;$$

$$u_{yk}(\xi_k, t) = (-1)^k \dot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)\cos\alpha_k \sin\beta_k + $$
$$+ (-1)^{k+1} \dot{\phi}_{\varsigma k}(\xi_k, t)\sin\alpha_k \sin\beta_k;$$

$$u_{yk}(\xi_k, t) = (-1)^k [\dot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)\sin\alpha_k + $$
$$+ \dot{\phi}_{\varsigma k}(\xi_k, t)\cos\alpha_k]. \tag{5}$$

Тут $\phi_{\eta k}(\xi_k, t), \phi_{\zeta k}(\xi_k, t)$ пружні переміщення точок k -ої балки у площинах $\eta_k O_k \xi_k$ та $\zeta_k O_k \xi_k$ відповідно. При цьому позитивні напрями пружних переміщень співпадають з позитивними напрямами осей локальних систем координат $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$.

Складові вектору моменту кількості руху транспортного засобу визначаються за формулою

$$G_x = I_x \dot{\psi} + \sum_{k=1}^{2} [\int_0^{l_k} (y_{0k} u_{zk} - z_{0k} u_{yk}) m_k(\xi_k)\, d\xi_k + $$
$$+ (-1)^k \sin\beta_k \cdot \int_0^{l_k} \dot{\phi}_{\xi k}(\xi_k, t) i_{\xi k}(\xi_k)\, d\xi_k];$$

$$G_y = I_y \dot{\gamma} + \sum_{k=1}^{2} [\int_0^{l_k} (z_{0k} u_{xk} - x_{0k} u_{zk}) m_k(\xi_k)\, d\xi_k + $$
$$+ (-1)^{k+1} \cos\beta_k \cdot \int_0^{l_k} \dot{\phi}_{\xi k}(\xi_k, t) i_{\xi k}(\xi_k)\, d\xi_k];$$

$$G_z = I_z\dot{\vartheta} + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{l_k}(x_{0k}u_{yk} - y_{0k}u_{xk})m_k(\xi_k)d\xi_k, \quad (6)$$

де I_x – масовий момент інерції транспортного засобу відносно осі x системи координат; x_{0k}, y_{0k}, z_{0k} – координати точок кріплення k-ої недеформованої балки; $i_{\xi k}(\xi_k)$ – погонний масовий момент інерції балки відносному осі ξ_k; $\dot{\phi}_{\xi k}(\xi_k, t)$ – швидкість пружного переміщення точок k-ої балки при коливаннях відносно осі $O_k\xi_k$.

Координати точок кріплення k-ої недеформованої балки визначаються виразами

$$x_{0k} = -h + (-1)^k \xi_k \sin\beta_k;$$

$$y_{0k} = (-1)^{k+1}(r + \xi_k \cos\beta_k);$$

$$z_{0k} = 0, k = 1,2, \quad (7)$$

де h – відстань по подовжній осі Ox апарату те місця кріплення конструкцій до центру мас; r – відстань від подовжньої осі Ox апарату до місця кріплення конструкцій.

Підставляємо (5), (7), в (4), (6), а результат в (1) та (2), та отримаємо рівняння руху центру мас пружного транспортного засобу

$$m\ddot{x} + \sum_{k=1}^{2}\cos\beta_k[(-1)^{k+1}\sin\alpha_k \times$$
$$\times\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k +$$
$$+(-1)^k\cos\alpha_k\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k] = F_x; \quad (8)$$

$$m\ddot{y} + \sum_{k=1}^{2}\sin\beta_k[(-1)^{k+1}\sin\alpha_k \times$$
$$\times\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k +$$
$$+(-1)^k\cos\alpha_k\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k] = F_y; \quad (9)$$

$$m\ddot{z} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}[\cos\alpha_k \times$$
$$\times\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k +$$
$$+\sin\alpha_k\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t)m_k(\xi_k)d\xi_k] = F_z \quad (10)$$

і рівняння обертального руху пружного транспортного засобу відносно центру мас

$$I_x\ddot{\psi} + \sum_{k=1}^{2}[\int_0^{l_k}(r + \xi_k\cos\beta_k)\times$$
$$\times(\ddot{\phi}_{\zeta k}m_k(\xi_k)\cos\alpha_k + \ddot{\phi}_{\eta k}m_k(\xi_k)\sin\alpha_k)d\xi_k +$$
$$+(-1)^k\sin\beta_k\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\xi k}i_k(\xi_k)d\xi_k] = M_x;$$

$$I_y\ddot{\gamma} + \sum_{k=1}^{2}[(-1)^{k+1}\int_0^{l_k}(h + (-1)^{k+1}\xi_k\sin\beta_k)\times$$
$$\times(\ddot{\phi}_{\zeta k}m_k(\xi_k)\cos\alpha_k + \ddot{\phi}_{\eta k}m_k(\xi_k)\sin\alpha_k)d\xi_k +$$
$$+(-1)^{k+1}\cos\beta_k\int_0^{l_k}\ddot{\phi}_{\xi k}i_k(\xi_k)d\xi_k] = M_y;$$

$$I_z\ddot{\vartheta} + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{l_k}((-1)^k h\sin\beta_k - \xi_k - r\cos\beta_k)\times$$
$$\times(\ddot{\phi}_{\zeta k}m_k(\xi_k)\sin\alpha_k +$$
$$+\ddot{\phi}_{\eta k}m_k(\xi_k)\cos\alpha_k)d\xi_k = M_z. \quad (11)$$

Для визначення величин $\phi_{\xi k}, \phi_{\eta k}, \phi_{\zeta k}$ розглянемо пружні коливання балок в системі $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$. Виходячи з принципу Даламбера, рівняння пружної балки можна отримати з рівнянь її пружної рівноваги, додавши до зовнішніх сил, що діють на балку, фіктивні (даламберові) сили інерції [3].

Рівняння пружних коливань балки можна записати у виді

$$m_k(\xi_k)\ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t) + \frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}[B_{\zeta k}(\xi_k)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\phi_{\zeta k}(\xi_k, t)}{\partial\xi_k^2}] = P_{\zeta k}(\xi_k, t);$$

$$m_k(\xi_k)\ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k,t)+\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}[B_{\eta k}(\xi_k)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\phi_{\eta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}=P_{\eta k}(\xi_k,t);$$

$$m_k(\xi_k)\ddot{\phi}_{\xi k}(\xi_k,t)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}[B_{\xi k}(\xi_k)\cdot\frac{\partial^2\phi_{\xi k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}]=$$
$$=P_{\xi k}(\xi_k,t);\quad k=1,2, \qquad (12)$$

де $B_{\zeta k},B_{\eta k},B_{\xi k}$ – вигинисті жорсткості балки з площинах $\zeta_k O_k \xi_k$ та $\eta_k O_k \xi_k$, і жорсткість балки на кручення відносно осі $O_k\xi_k$; $P_{\zeta k},P_{\eta k},P_{\xi k}$ – вантаж, що діє на балку з боку корпусу транспортного засобу.

Граничні умови для системи (12) визначаються залежно від виду кріплення балки:

при $\xi_k=0$

$$\begin{cases}\phi_{\zeta k}(\xi_k,t)=0;\dfrac{\partial\phi_{\zeta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k}=0;\\ \phi_{\eta k}(\xi_k,t)=0;\dfrac{\partial\phi_{\eta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k}=0;\end{cases} \qquad (13)$$

при $\xi_k=l_k$

$$\frac{\partial^2\phi_{\xi k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}=0;\frac{\partial}{\partial\xi_k}[B_{\zeta k}(\xi_k)\frac{\partial^2\phi_{\zeta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}]=0;$$
$$\frac{\partial^2\phi_{\eta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}=0;\frac{\partial}{\partial\xi_k}[B_{\eta k}(\xi_k)\frac{\partial^2\phi_{\eta k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k^2}]=0;$$

для крутильних коливань

при $\xi_k=0\quad \phi_{\xi k}(\xi_k,t)=0;$ (14)

при $\xi_k=l_k\quad \dfrac{\partial\phi_{\xi k}(\xi_k,t)}{\partial\xi_k}=0$.

Функції $P_{\zeta k}(\cdot),P_{\eta k}(\cdot),P_{\xi k}(\cdot)$, що виражають зовнішнє навантаження на балку, визначаються за формулами

$$P_{\zeta k}(\xi_k,t)=-m_k(\xi_k)\{(-1)^{k+1}\times$$
$$\times(\ddot{z}\cos\alpha_k+\ddot{y}\sin\alpha_k\sin\beta_k+\ddot{x}\sin\alpha_k\cos\beta_k)+$$
$$+\ddot{\psi}(r+\xi_k\cos\beta_k)\cos\alpha_k+$$
$$+\ddot{\gamma}[(-1)^{k+1}h+\xi_k\sin\beta_k]\cos\alpha_k+$$
$$+\ddot{\vartheta}[(-1)^k h\sin\beta_k-r\cos\beta_k-\xi_k]\sin\alpha_k\}; \qquad (15)$$

$$P_{\eta k}(\xi_k,t)=-m_k(\xi_k)\{(-1)^{k+1}\ddot{z}\sin\alpha_k+$$
$$+(-1)^k(\ddot{y}\cos\alpha_k\sin\beta_k+\ddot{x}\cos\alpha_k\cos\beta_k)+$$
$$+\ddot{\psi}(r+\xi_k\cos\beta_k)\sin\alpha_k+$$
$$+\ddot{\gamma}[(-1)^{k+1}h+\xi_k\sin\beta_k]\sin\alpha_k+$$
$$+\ddot{\vartheta}[(-1)^{k+1}h\sin\beta_k+r\cos\beta_k+\xi_k]\cos\alpha_k\}; \ (16)$$

$$P_{\xi k}(\xi_k,t)=-i_k(\xi_k)[(-1)^k\ddot{\psi}\sin\beta_k+$$
$$+(-1)^{k+1}\ddot{\gamma}\cos\beta_k]. \qquad (17)$$

Таким чином, рівняння (8)-(12) з граничними умовами (13) і (14) є системою диференціальних рівнянь в приватних похідних, що описує збурений рух транспортного засобу з урахуванням пружних коливань двох конструкцій. Системи рівнянь такого роду носять назву "гібридних". Проте, надзвичайно складно використати їх у рамках проектного аналізу і синтезу динамічних властивостей. Тому на практиці зазвичай існує етап спрощення системи рівнянь (8)-(12) шляхом зведення її до системи звичайних диференціальних рівнянь з подальшим усіканням числа рівнянь до розумної межі. Процедура переходу від (8)-(12) до системи звичайних диференціальних рівнянь базується на розкладанні функцій $\phi_{\xi k},\phi_{\eta k},\phi_{\zeta k}$ у ряди по формах власних коливань пружних балок. Це розкладання має вигляд

$$\phi_{\zeta k}(\xi_k,t)=\sum_{n=1}^{N}f_{\zeta k}^n(\xi_k)q_{\zeta k}^n(t);$$

$$\phi_{\eta k}(\xi_k,t)=\sum_{n=1}^{N}f_{\eta k}^n(\xi_k)q_{\eta k}^n(t);$$

$$\phi_{\xi k}(\xi_k,t)=\sum_{n=1}^{N}f_{\xi k}^n(\xi_k)q_{\xi k}^n(t), \qquad (18)$$

де $f_{\zeta k}(\cdot),f_{\eta k}(\cdot),f_{\xi k}(\cdot)$ – відповідно форма вигинистих коливань балки в площинах $\zeta_k O_k \xi_k$ та $\eta_k O_k \xi_k$, і крутильних коливань балки; $q^n_{\zeta k}(t), q^n_{\eta k}(t), q^n_{\xi k}(t)$ – узагальнені координати; N – число мод пружних вигинистих і крутильних коливань балок, що враховуються.

Вибір числа мод коливань, що враховуються, є самостійним завданням - завданням редукції. Редукування початкової системи рівнянь може проводитися за різними критеріями.

По-перше, вищі моди коливань для практично переважного числа реальних пружних конструкцій мають високе демпфування за рахунок внутрішнього і конструктивного тертя і вузько-резонансні списа амплітудно-частотних характеристик. Крім того, коефіцієнти інерційного зв'язку для вищих мод нехтує малі. З цієї причини високочастотні складові $q^n_{jk}(t), j = \zeta, \eta, \xi; k = 1, 2$, у практичних розрахунках можуть бути відкинуті.

По-друге, відкидання деяких мод пружних коливань конструкції може бути проведене на основі порівняння величин власних частот і смуги пропускання приводів системи управління. Підставляємо (15), (16), (17) в (12), а (18) в (8), (9), (10), (12) та граничні умови (13), (14), отримаємо скінченно-мірну систему рівнянь збуреного руху пружного транспортного засобу.

Рівняння сил набирають наступного вигляду:

$$m\ddot{x} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(-1)^{k+1} a^n_{\zeta k}\ddot{q}^n_{\zeta k}\sin\alpha_k + (-1)^k a^n_{\zeta k}\ddot{q}^n_{\zeta k}\cos\alpha_k]\cos\beta_k = F_x;$$

$$m\ddot{y} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(-1)^{k+1} a^n_{\zeta k}\ddot{q}^n_{\zeta k}\sin\alpha_k + (-1)^k a^n_{\zeta k}\ddot{q}^n_{\zeta k}\cos\alpha_k]\sin\beta_k = F_y;$$

$$m\ddot{z} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(-1)^{k+1} a^n_{\zeta k}\ddot{q}^n_{\zeta k}\cos\alpha_k + a^n_{\eta k}\ddot{q}^n_{\eta k}\sin\alpha_k] = F_z. \qquad (19)$$

Рівняння моментів набувають наступного вигляду:

$$I_x\ddot{\psi} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(ra^n_{\zeta k} + b^n_{\zeta k}\cos\beta_k)\ddot{q}^n_{\zeta k}\cos\alpha_k + (ra^n_{\eta k} + b^n_{\eta k}\cos\beta_k)\ddot{q}^n_{\eta k}\cdot\sin\alpha_k + (-1)^k a^n_{\xi k}\ddot{q}^n_{\xi k}\sin\beta_k] = M_x; \qquad (20)$$

$$I_y\ddot{\gamma} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[((-1)^{k+1} ha^n_{\zeta k} + b^n_{\zeta k}\sin\beta_k)\ddot{q}^n_{\zeta k} \times \cos\alpha_k + +((-1)^{k+1} ha^n_{\eta k} + b^n_{\eta k}\sin\beta_k)\ddot{q}^n_{\eta k} \times \sin\alpha_k + (-1)^{k+1} a^n_{\xi k}\ddot{q}^n_{\xi k}\cos\beta_k] = M_y; \qquad (21)$$

$$I_x\ddot{\vartheta} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[((-1)^k ha^n_{\zeta k} - b^n_{\zeta k} - ra^n_{\zeta k}\cos\beta_k) \times \ddot{q}^n_{\zeta k}\sin\alpha_k + ((-1)^k ha^n_{\eta k}\sin\beta_k - b^n_{\eta k} - ra^n_{\eta k}\cos\beta_k)\ddot{q}^n_{\eta k}\cdot\cos\alpha_k] = M_z. \qquad (22)$$

Рівняння вигинистих коливань в площинах конструкцій $\zeta_k O_k \xi_k$ та $\eta_k O_k \xi_k$ представляються таким чином:

$$\mu^n_{\zeta k}[\ddot{q}^n_{\zeta k} + \delta^n_{\zeta k}\frac{\omega^n_{\zeta k}}{\pi}\dot{q}^n_{\zeta k} + (\omega^n_{\zeta k})^2 q^n_{\zeta k}] + (-1)^{k+1} a^n_{\zeta k}\cdot[\ddot{z}\cos\alpha_k + (\ddot{x}\cos\beta_k + \ddot{y}\sin\beta_k) \times \sin\alpha_k] + (ra^n_{\zeta k} + b^n_{\zeta k}\cos\beta_k)\ddot{\psi}\cos\alpha_k + [(-1)^{k+1} ha^n_{\zeta k} - b^n_{\zeta k}\sin\beta_k - b^n_{\zeta k}]\ddot{\gamma}\cos\alpha_k + [(-1)^k ha^n_{\zeta k}\sin\beta_k - ra^n_{\zeta k}\cos\beta_k]\ddot{\vartheta}\sin\alpha_k = 0; \qquad (23)$$

$$\mu^n_{\eta k}[\ddot{q}^n_{\eta k} + \delta^n_{\eta k}\frac{\omega^n_{\eta k}}{\pi}\dot{q}^n_{\eta k} + (\omega^n_{\eta k})^2 q^n_{\eta k}] + (-1)^{k+1} a^n_{\eta k}\cdot[\ddot{z}\sin\alpha_k - (\ddot{x}\cos\beta_k + \ddot{y}\sin\beta_k)\cos\alpha_k] + (ra^n_{\eta k} + b^n_{\eta k}\cos\beta_k) \times \ddot{\psi}\sin\alpha_k + [(-1)^{k+1} ha^n_{\eta k} + b^n_{\eta k}\sin\beta_k] \times \ddot{\gamma}\sin\alpha_k + [(-1)^{k+1} ha^n_{\eta k}\sin\beta_k + ra^n_{\eta k}\cos\beta_k + b^n_{\eta k}]\ddot{\vartheta}\cos\alpha_k = 0. \qquad (24)$$

Рівняння крутильних коливань мають вигляд:

$$i^n_{\xi k}[\ddot{q}^n_{\xi k} + \delta^n_{\xi k}\frac{\omega^n_{\xi k}}{\pi}\dot{q}^n_{\xi k} + (\omega^n_{\xi k})^2 q^n_{\xi k}] + (-1)^{k+1} a^n_{\xi k}(\ddot{\gamma}\cos\beta_k - \ddot{\psi}\sin\beta_k) = 0;$$
$$k = 1, 2; \quad n = \overline{1, N}. \qquad (25)$$

У рівняннях (23)-(25) величини $\mu^n_{\zeta k}, \mu^n_{\eta k}, i^n_{\xi k}$ -

відповідно приведені маси вигинистих і приведений масовий момент крутильних коливань балки. Тут n – індекс номера моди; $\delta^n_{\zeta\,k}, \delta^n_{\eta\,k}, \delta^n_{\xi\,k}$ – логарифмічні декременти вигинистих і крутильних коливань балки; $a^n_{\zeta\,k}, a^n_{\eta\,k}, a^n_{\xi\,k}, b^n_{\zeta\,k}, b^n_{\eta\,k}$ – коефіцієнти інерційних зв'язків.

Система (20)-(25) при фіксованому положенні ПСБ відносно корпусу транспортного засобу, тобто при $\alpha_k = \text{const}$ та $\beta_k = \text{const}$, $k = 1,2,$ є лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Інакше, якщо динаміка транспортного засобу розглядається в процесі перекладання конструкцій, система рівнянь (20)-(25) буде істотно нелінійною і нестаціонарною.
Покладемо в рівняннях (20)-(25) кути відхилення панелей в локальних системах координат $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ $(k = 1,2)$ рівними нулю: $\alpha_k = \beta_k = 0$. У рівняннях (20)-(25) виключимо члени, залежні від лінійних прискорень центру мас транспортного засобу. В результаті система (20)-(25) істотно спроститься і набере вигляду:
рівняння моментів

$$I_x\ddot{\psi} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}(ra^n_{\zeta\,k} + b^n_{\zeta\,k})\ddot{q}^n_{\zeta\,k} = M_x;$$

$$I_y\ddot{\gamma} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(-1)^{k+1}(ha^n_{\zeta\,k}\ddot{q}^n_{\zeta\,k} + a^n_{\xi\,k}\ddot{q}^n_{\xi\,k})] = M_y;$$

$$I_z\ddot{\vartheta} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}(ra^n_{\eta\,k} + b^n_{\eta\,k})\ddot{q}^n_{\eta\,k} = M_z; \qquad (26)$$

рівняння вигинистих коливань в площині конструкцій

$$\mu^n_{\zeta\,k}[\ddot{q}^n_{\zeta\,k} + \delta^n_{\zeta\,k}\frac{\omega^n_{\zeta\,k}}{\pi}\dot{q}^n_{\zeta\,k} + (\omega^n_{\zeta\,k})^2 q^n_{\zeta\,k}] + (ra^n_{\zeta\,k} + b^n_{\zeta\,k})\ddot{\psi} + (-1)^{k+1}ha^n_{\zeta\,k}\ddot{\gamma} = 0; \qquad (27)$$

$$\mu^n_{\eta\,k}[\ddot{q}^n_{\eta\,k} + \delta^n_{\eta\,k}\frac{\omega^n_{\eta\,k}}{\pi}\dot{q}^n_{\eta\,k} + (\omega^n_{\eta\,k})^2 q^n_{\eta\,k}] + [ra^n_{\eta\,k} + b^n_{\eta\,k}]\ddot{\vartheta} = 0; \qquad (28)$$

рівняння крутильних коливань

$$i^n_{\xi\,k}[\ddot{q}^n_{\xi\,k} + \delta^n_{\xi\,k}\frac{\omega^n_{\xi\,k}}{\pi}\dot{q}^n_{\xi\,k} + (\omega^n_{\xi\,k})^2 q^n_{\xi\,k}] + (-1)^{k+1} \times a^n_{\xi\,k}\ddot{\gamma} = 0; \quad \ddot{\gamma} = 0, k = 1,2. \qquad (29)$$

При розгляді цієї системи, видно, що рухи рискання і крену є взаємозв'язаними, тоді як рух тангажу є незалежним.

Далі розглядатимемо рівняння руху транспортного засобу навколо центру мас (26) і рівняння вигинистих коливань (27) і (28). Введемо в розгляд наступний вектор $\dot{\bar{\omega}} = [\ddot{\psi}\ \ddot{\gamma}\ \ddot{\vartheta}]^T$, тоді з урахуванням рівняння (3), система рівнянь (26) приймає вид:

$$\begin{aligned}&I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + \\ &+\omega_y(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z) - \\ &-\omega_z(I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z) + \\ &+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}(ra^n_{\zeta\,k} + b^n_{\zeta\,k})\ddot{q}^n_{\zeta\,k} = M_x + M_{X\Gamma};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-I_{yx}\dot{\omega}_x + I_y\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z + \\ &+\omega_z(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) - \\ &-\omega_x(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z) + \\ &+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}[(-1)^{k+1}(ha^n_{\zeta\,k}\ddot{q}^n_{\zeta\,k} + a^n_{\xi\,k}\ddot{q}^n_{\xi\,k})] = \\ &= M_y + M_{Y\Gamma};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-I_{xz}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_y + I_z\dot{\omega}_z + \\ &+\omega_x(I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z) - \\ &-\omega_y(I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \\ &+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}(ra^n_{\eta\,k} + b^n_{\eta\,k})\ddot{q}^n_{\eta\,k} = M_z + M_{Z\Gamma}. \qquad (30)\end{aligned}$$

Рівняння вигинистих коливань (27), (28) перепишуться в наступному виді

$$\mu^n_{\zeta\,k}[\ddot{q}^n_{\zeta\,k} + \delta^n_{\zeta\,k}\frac{\omega^n_{\zeta\,k}}{\pi}\dot{q}^n_{\zeta\,k} + (\omega^n_{\zeta\,k})^2 q^n_{\zeta\,k}] + (ra^n_{\zeta\,k} + b^n_{\zeta\,k})\dot{\omega}_x + (-1)^{k+1}ha^n_{\zeta\,k}\dot{\omega}_y = 0; \qquad (31)$$

$$\mu^n_{\eta\,k}[\ddot{q}^n_{\eta\,k} + \delta^n_{\eta\,k}\frac{\omega^n_{\eta\,k}}{\pi}\dot{q}^n_{\eta\,k} + (\omega^n_{\eta\,k})^2 q^n_{\eta\,k}] + [ra^n_{\eta\,k} + b^n_{\eta\,k}]\dot{\omega}_z = 0, k = 1,2;\ n = \overline{1,N};\ N = 2. \qquad (32)$$

Для ілюстрації працездатності математичної моделі пружного транспортного засобу був проведений обчислювальний експеримент.

Висновки

Розглянуто аналітичне рішення побудови динамічної математичної моделі пружного транспортного засобу як системи із зосередженими, так і розподіленими параметрами. Отримані рівняння руху транспортного засобу навколо його центру мас і вигинистих коливань в загальному вигляді. Отримувані величини амплітуд коливань пружних елементів є порівняно малими величинами, що свідчить про досить слабке збурення конструкцій і точнішої орієнтації. Слабкі збурення конструкцій можуть пояснюватися тим, що орієнтація відбувається за допомогою управління системою гіродинов, де управління відбувається плавно. Отриманий такий закон моменту, що управляє, який не призводить до збудження пружних елементів. При цьому вплив пружності конструкції на його орієнтацію буде зведений до мінімуму. Отримані аналітичні результати можуть бути використані для побудови систем управління пружними транспортними засобами з розглянутим компонуванням гіродинов і конструкцією апарату.

Література

1. Говорущенко Н.Я., Туренко А.Н. Системотехника транспорта. — Харьков: ХГАДТУ, 1998. — 255 с.
2. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления / Аврамов К. В., Михлин Ю. В. — М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. — 2010. — 704 с.
3. Баркин А. И. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления / Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В. — М.: МАИ, 1992. — 303 с.

Рецензент: А.В. Бажинов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2015 г.