

МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО КАСКАДУ В РАМКАХ ОБОЛОНКОВИХ МОДЕЛЕЙ

А.А. Тропіна, д.т.н., професор, ХНАДУ

Анотація. Для дослідження дрібномасштабної турбулентності розроблена модель турбулентного каскаду в стисливому середовищі на основі аналізу Фур'є. Отримано, що введення енергії в дрібні масштаби не впливає на дилатаційну складову енергетичного спектру, але впливає на структурні функції другого порядку.

Ключевые слова: турбулентний каскад, пульсаційна швидкість, стисливе середовище, аналіз Фур'є, оболонкова модель.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО КАСКАДА В РАМКАХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.А. Тропина, д.т.н., профессор, ХНАДУ

Аннотация. Для исследования мелкомасштабной турбулентности разработана модель турбулентного каскада в сжимаемой среде на основе Фурье анализа. Получено, что ввод энергии в мелкие масштабы не влияет на дилатационную составляющую энергетического спектра, но влияет на структурные функции второго порядка.

Ключевые слова: турбулентный каскад, пульсационная скорость, сжимаемая среда, Фурье анализ, оболочечная модель.

MODELING OF TURBULENT CASCADE IN THE SHELL MODELS

A.A. Tropina, professor, dr. eng. sc., KhNAHU

Abstract. For the study of the small-scale turbulence a model of the turbulent cascade in a compressible medium has been developed on the basis of Fourier analysis. It has been found that the energy deposition into small scales does not influence on the dilatant component of the energy spectrum, but it affects the second order structural functions.

Key words: turbulent cascade, pulsation velocity, compressible medium, Fourier analysis, shell model.

Вступ

Це добре відомий факт, що вивчення механізмів турбулентності було розпочато, в основному, для нестисливої рідини. Однак, в останній час турбулентність в стисливих середовищах привертає велику увагу в літературі через фундаментальну важливість для практичних застосувань, починаючи від аеродинаміки гіперзвукових літальних апаратів до проблем астрофізики. У той же час в нашому розумінні механізмів турбулентності в стисливих середовищах є ще багато невідомих.

Невідомі питання пов'язані з процесами переносу енергії по всьому спектру в присутності локалізованого введення енергії. Нелінійна взаємодія між стисливими і соліноідальними модами пульсацій швидкості, а також нелінійна взаємодія між модами зовнішньої сили приводить до появи нових механізмів переносу енергії по турбулентному спектру. Можна зазначити, що будь-які дослідження в цьому напрямку пов'язані з управлінням турбулентними когерентними структурами за допомогою локалізованого підведення енергії є дуже корисними для ін-

женерних застосувань. Наприклад, організація зниження опору в граничному шарі біля твердої стінки, перемішування і підвищення теплопередачі, а також збільшення швидкості обраної хімічної реакції, генерація турбулентності в області перед фронтом полум'я, акустичне зниження рівня шуму є деякі з практичних прикладів, де короткострокове локалізоване введення енергії в різні масштаби може привести до збільшення процесу розпаду великих вихорів або до модифікації когерентних структур і дисипації.

Аналіз публікацій

Одним з головних питань турбулентності є потенційний вплив на структуру турбулентного каскаду локалізованого введення енергії на малих масштабах турбулентності. Це є важливим для подальшого розвитку нових методів експериментальних досліджень турбулентних характеристик потоку, таких як, наприклад, метод фемтосекундного лазерного електронного збудження (FLEET), який забезпечує вимірювання пульсаційних швидкостей без збурення головного потоку. Це також є цікавим для подальшого розвитку чисельних методів, таких як популярні методи LES, які не відслідковують турбулентність на малих масштабах і використовують різні замикаючі співвідношення для моделювання цих масштабів.

Перший крок в вивченні ефектів стисливості рідини на турбулентний спектр було зроблено в роботі [1], де чисельно проаналізовано характер стисливої турбулентності в залежності від зовнішньої сили для випадку рідини, яка прискорюється силою, що має обертальну і стискальну компоненти. Автори вперше зазначили, що середня кінетична енергія турбулентного спектру може залежати від ефекту стисливості. Таким чином, енергетичний спектр для стисливого середовища збігається зі спектром нестисливого середовища тільки при малих хвильових числах. Автори роботи [1] також відзначили, що властивості турбулентності стисливої рідини залежать не тільки від числа Рейнольдса і Маха, але і від начального рівня флуктуацій густини та від характеру зовнішньої сили.

Багато робіт в літературі присвячено аналізу енергетичного спектру швидкості, але значно менше уваги зосереджено на енергетичному спектрі густини. Велика частина робіт, пов'язаних з аналізом спектру густини має

відношення до міжзоряного середовища і деякі спостереження показують Колмогоровське масштабування [2] але існують деякі роботи, які вказують на більш дрібні спектри [3]. Менший нахил залежності енергетичного спектру від хвильових чисел для випадку турбулентності стисливого газу було також підтверджено результатами великомасштабного прямого чисельного моделювання (DNS) надзвукової ізотермічної турбулентності в роботах [4-8]. В роботі [4] автори показали, що діапазон інерційної частини спектру для стисливої рідини істотно відрізняється від Колмогоровського масштабування, з нахилом спектра швидкості, близьким до -2, але енергетичний спектр Колмогорова є справедливим для величини $v = \rho^{1/3} u$.

Більш пізніші дослідження представлені в роботі [5] і відносяться до вимірювань характеристик турбулентності стисливої рідини і прямих чисельних розрахунків. Автори досліджували функцію щільності ймовірності (PDF) і показали, що PDF для турбулентності стисливої рідини відрізняється від розподілу Гауса через сильні переривчасті флуктуації при зіткненні ударних хвиль. На відміну від попередньої роботи [1] в роботі [5] відмічається, що турбулентність стисливого середовища проявляється на великих масштабах, але веде себе, як соленоїдальна турбулентність на менших масштабах.

Деякі роботи в цієї області пов'язані з аналізом стисливої ізотермічної гідродинамічної турбулентності в термінах двоточкових кореляційних функцій [6-7]. В роботі [6] автори вивели співвідношення для двоточкових кореляційних функцій, що істотно відрізняється від випадку нестисливої рідини і було перевірено шляхом чисельного розрахунку в роботі [8]. Основні теоретичні питання моделювання ефектів стисливості у турбулентних потоках були також розглянуті в роботах [9-12] з використанням чисельної техніки огрубіння, головними гіпотезами якої є наявність проміжного діапазону масштабування, де домінує інерційна динаміка, а також гіпотеза про консервативність кінетичної енергії для стисливої рідини.

Ціль та постановка задачі

Основна ціль даного дослідження полягає в визначенні головних механізмів впливу локалізованого введення енергії в дрібні масш-

таби на турбулентний спектр з урахуванням ефектів стисливості.

Будемо використовувати модель каскадних процесів на основі аналізу Фур'є поля швидкостей, виходячи з припущення, що $u_l = \sum_k u_l(\bar{k}, t) \cdot e^{i\bar{k} \cdot x}$. Фур'є-компоненти швидкості пов'язані зі спектральною щільністю енергії на одиницю маси наступним співвідношенням

$$2 \int_{k_i/\sqrt{2}}^{k_i\sqrt{2}} E(k', t) dk' = u_i^2(t), \quad (1)$$

де k_i - це хвильове число i -го масштабу турбулентних пульсацій.

Формально $u_i(t)$ можна розглядати як пульсації швидкості в момент часу t і розміру $1/k_i$. Для розрахунку кінетичної енергії, що міститься в пульсаціях масштабу l , розглянемо рівняння Нав'є-Стокса для фур'є-компонент поля швидкостей, як в роботі [13] з додаванням безвихрової зовнішньої сили Лоренца (останній член в рівнянні (2)) і беручи до уваги ефекти стисливості. Так, для випадку нестисливої рідини маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j(\bar{k}, t)}{\partial t} &= -i(\delta_{jl} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_q u_l(\bar{q}, t) \\ &\times u_m(\bar{k} - \bar{q}, t) - k^2 \cdot v \cdot u_j(\bar{k}, t) + F_j(\bar{k}, t) \quad (2) \\ k_j u_j(\bar{k}, t) &= 0, \end{aligned}$$

де $k_i = k_1 2^{(i-1)/\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 4, 8$ є параметром, який може регулювати зміну хвильових чисел в хвильовому просторі. Для спектра інерційного діапазону Колмогорова структурна функція другого порядку $F_2(r, t)$ має вигляд

$$F_2(r, t) = 4 \int_0^\infty E(k, t) \left(1 - \frac{\sin(kr)}{kr} \right) dk. \quad (3)$$

Для випадку стисливого середовища система рівнянь для компонент Фур'є приймає вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l(\bar{k}, t)}{\partial t} + ik_j \sum_q u_l(q, t) u_j(\bar{k} - \bar{q}, t) &= \\ = -k_l^2 \mu \cdot \sum_q u_l(\bar{q}, t) \cdot b(\bar{k} - \bar{q}, t) - \\ - ik_l R \sum_q \rho(\bar{q}, t) T(\bar{k} - \bar{q}, t) \cdot b(\bar{k} - \bar{q}, t) - \\ - ik_l R \cdot T(\bar{k}, t) + F_l(\bar{k}, t) - \\ - \frac{1}{3} \mu \cdot k_l k_j \sum_q u_j(\bar{q}, t) \cdot b(\bar{k} - \bar{q}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho(\bar{k}, t)}{\partial t} + 2ik_j \sum_q \rho(\bar{q}, t) u_j(\bar{k} - \bar{q}, t) = 0 \quad (5)$$

де $\frac{1}{\rho} = \sum_k b(\bar{k}, t) e^{i\bar{k} \cdot x}$, коефіцієнти цього ряду можна знайти з тотожності $\frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1$.

Таким чином дисипація енергії відбувається за рахунок в'язкості і в зв'язку з переміщенням межі і зміною об'єму середовища (четвертий доданок у рівнянні (4)).

В рівняннях (1)-(5) $u(k, t)$, $\rho(k, t)$, $T(k, t)$ є амплітуди Фур'є швидкості, густини і температури, підсумовані на октаву хвильових чисел так, що

$$\begin{aligned} u^2(t, k) &= \left\langle \sum_{k/\sqrt{2} \leq |k'| \leq \sqrt{2}k} u_l(k', t) u_l(-k', t) \right\rangle \\ T(t, k) &= \left\langle \sum_{k/\sqrt{2} \leq |k'| \leq \sqrt{2}k} T(k', t) \right\rangle \end{aligned}$$

Припустимо, що основний внесок в каскадний процес вносять члени, що містять пульсації масштабу $q = k/2$ та $q = 2k$, тобто всі складові під знаком суми в рівняннях (2-5) можуть бути апроксимовані як різниця між їх значеннями при $q = 2k$ та $q = k/2$. Замикаючі співвідношення отримуємо, беручи до уваги консервативний характер спектра кінетичної енергії для випадку стисливого середовища [10]. Початкові умови були сформульовані наступним чином:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{m+1} = T_0 = T_{m+1} = \rho_0 = \rho_{m+1} = 0, \\ u_1 &= 10 \div 20, T_1 = 0.01 \div 1, \rho_1 = 0.01 \div 1, \\ u_i^0 &= T_i^0 = \rho_i^0 = 0, i = 1..m, v = 1.7 \cdot 10^{-5}, \\ m &= 10 \div 60, k_i = k_1 2^{(i-1)/2}. \end{aligned}$$

Чисельні результати

Рівняння для густини (5) має особливість при нескінченно низькому рівні пульсацій густини $\rho_i \rightarrow 0, i=1..m$. З фізичної точки зору це означає, що рішення наближається до межі нестисливої рідини. Таким чином, для випадку стисливого середовища після деякого періоду часу гранична умова для амплітуд Фур'є швидкості $u_{m+1} = 0$ призводить до виникнення коливань, викликаних неспроможністю розв'язку задачі для стисливого середовища задовольнити цю граничну умову (рис.1). Для подолання цих труднощів в розрахунках використовувався спеціальний перемикач на випадок нестисливого середовища при $\rho_i \rightarrow 0, i=1..m$.

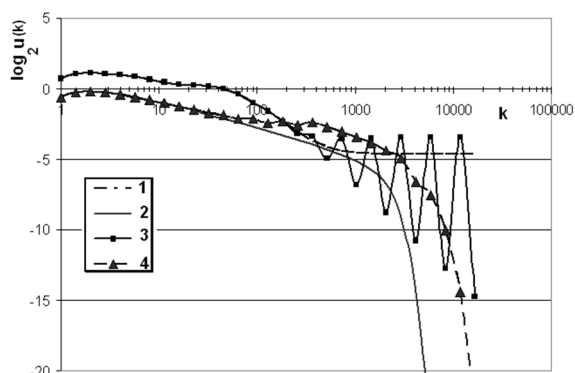


Рис. 1. Турбулентний спектр в залежності від хвильового числа при різних граничних умовах $k = k_{\max}$: 1 – стисливе середовище, $u_{m+1} = u_m$, 2 – нестисливе середовище, $u_{m+1} = 0$, 3 – стисливе середовище, $u_{m+1} = 0$, 4 – стисливе середовище з переходом до нестисливого випадку, $u_{m+1} = 0$.

Результати представлені на рис.1 відповідають випадку кількості октав $m = 40$ та початковим умовам $u_1 = 12.2, T_1 = 1, \rho_1 = 1$ в момент часу $t = 0,2$ с (криві 1,2) і часу $t = 0,6$ с (криві 3,4). Основні розбіжності між спектром турбулентності для стисливого та нестисливого середовища спостерігаються при високих хвильових числах в області в'язкої дисипації.

Проведемо оцінку джерелового доданка і числа октав для рівняння (4). При проведенні вимірювань пульсацій швидкості методом FLEET [15] енергія, введена за допомогою лазерного імпульсу тривалості 150 фс, створює плазмову циліндричну область радіусу

$R_c = 30$ мкм та 1 см у висоту. Беручи до уваги, що $k = 2\pi/l$, маємо оцінку числа октав $m \cong 29 \div 30$ для цього випадку введення енергії. Максимальна інтенсивність сили $F \cong 1.2 \cdot 10^7$ Дж/м³ була оцінена як $F \cong \Delta E / V_p$, де ΔE енергія лазерного імпульсу (2 мДж за даними роботи [15]), V_p є об'єм плазми, яка створюється лазерним імпульсом. Початковий рівень пульсацій швидкості було вибрано як $u_1 = 12.2$ м/с, згідно з експериментальними даними по вимірюванню швидкості в роботі [15].

Досліджувалась поведінка спектру дилатантного тиску, щоб зрозуміти, як можна потенційно вплинути на цей спектр за рахунок вкладеної енергії. Інтенсивність спектру дилатантного тиску, визначеного як

$$E_p(k) = \left\langle - \sum_{k/\sqrt{2} \leq |k'| \leq \sqrt{2}k} p(k') \operatorname{div} v(k', t) \right\rangle, \text{ в наших}$$

змінних має вигляд

$$E_p(k) = \left\langle ik \cdot p \sum_{k/\sqrt{2} \leq |k'| \leq \sqrt{2}k} v(k', t) \right\rangle. \text{ Результати роз-}$$

рахунків $|E_p(k)|$ представлені на рис. 2.

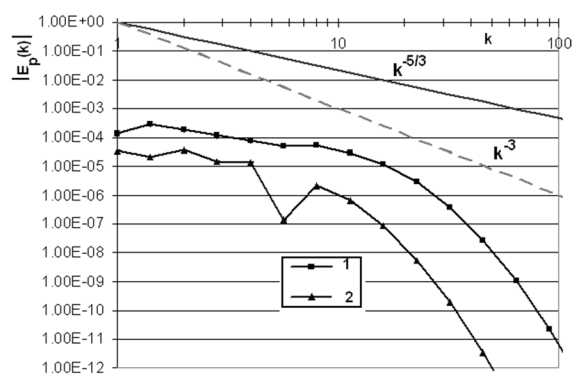


Рис. 2. Залежність спектру дилатантного тиску від хвильового числа при різних початкових умовах: 1 – $u_1 = 12.2, T_1 = 1, \rho_1 = 1$; 2 – $u_1 = 12.2, T_1 = 0.1, \rho_1 = 0.1$.

Можна зазначити, що при низьких хвильових числах спектр $|E_p(k)|$ поводиться відповідно до закону Колмогорова, але при високих хвильових числах спектр дилатантного тиску змінюється з хвильовим числом як k^{-3} . Цей результат добре корелює з результатами чисельних розрахунків на основі методики огрубіння, приведених в роботі [10]. Також

було отримано, що будь-яке введення енергії при великих хвильових числах не впливає на спектр дилатантного тиску, однак при введенні енергії у великі масштаби (при $m \leq 11$) ми можемо впливати на поведінку спектру дилатантного тиску, крім того поведінка $|E_p(k)|$ змінюється зі зміною початкових рівнів густини і температури збурень (рис.2).

У той же час введення енергії в різні октави впливає на рівень турбулентних пульсацій швидкості. У деякий момент часу еволюції спектра в залежності від початкового рівня турбулентності турбулентний каскад досягає закону подібності Колмогорова, але будучи збурений зовнішньою силою починає відхилятися від закону Колмогорова. Через деякий час турбулентний каскад повертається до інерційного спектру, але зі збільшенням інерційного інтервалу. Цей ефект пов'язано зі збільшенням локального числа Рейнольдса, яке призводить до необхідності додаткових менших масштабів для дисипації енергії. В процесі еволюції турбулентного спектра максимум швидкості пульсацій досягається у тій же октаві, де діяла зовнішня сила. Октави спектру не є не еквівалентними у їх відповіді на зовнішню силу, оскільки більш дрібні масштаби передають набагато більше енергії в дисипативні процеси, отже сила, яка діє на дрібні масштаби діапазону викликає підвищену дисипацію, а також додаткове виробництво турбулентної кінетичної енергії.

Еволюція турбулентного спектру для стисливого середовища зі збуренням зовнішньою силою в різних октавах представлена на рис.3.

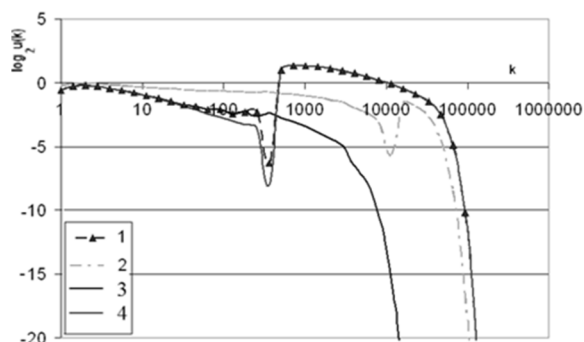


Рис. 3. Еволюція швидкості пульсацій в залежності від хвильового числа: 1- стисливе середовище, сила в 19-й октаві; 2- стисливе середовище, сила в 29 октаві; 3- стисливе середовище, без сили; 4- нестисливе середовище, сила в 19-й октаві.

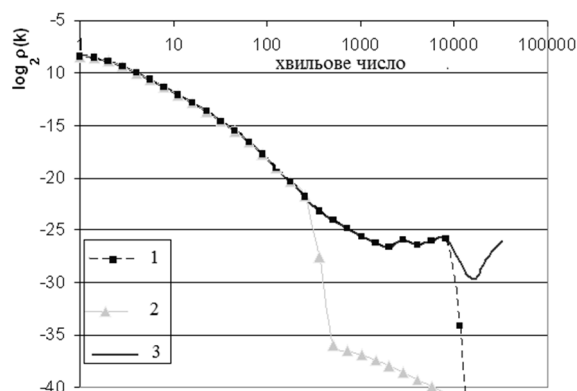


Рис. 4. Еволюція пульсацій густини з форсованими вкладеної енергії при різних октави: 1- стисливе середовище, сила в 19-й октаві; 2- стисливе середовище, сила в 29 октаві, 3- стисливе середовище, без сили.

Одержано, що зовнішня сила призводить до значних змін пульсацій швидкості, але незабаром після утворення інерційного інтервалу турбулентний каскад розвивається як для випадку нестисливого середовища для октав, які є вищими октави з зовнішньою силою. Тобто значні збурення пульсацій швидкості викликають зниження пульсацій густини нижче мінімального рівня (рис.4), отже поведінка спектру наближається до нестисливої межі.

Додатково для оцінки можливого впливу короткострокового введення енергії в дрібні масштаби на турбулентний спектр при вимірюванні швидкості методом FLEET [15] було проаналізовано поведінку умовних структурних функцій другого порядку на основі рівнянь 1,3. Результати розрахунків порівнювалися з експериментальними даними, наведеними в роботі [15], де вимірювання структурних функцій другого порядку були зроблено методом FLEET у турбулентному потоці повітря. Розрахунки були проведені для стисливого середовища при наступних умовах $m = 40$, $k_i = k_1 2^{(i-1)/2}$, $u_1 = 12.2$, $T_1 = 1$, $\rho_1 = 1$, $v = 1.7 \cdot 10^{-5}$, $u_i^0 = T_i^0 = \rho_i^0 = 0$, $i = 1..m$.

Результати порівняння представлені на рис.5.

Можна відзначити, що кривизна умовних структурних функцій другого порядку визначається флуктуаціями енергії, яка додається за допомогою лазерного імпульсу. Процес виглядає аналогічно змінам постійної в законі Колмогорова для інерційного інтервалу.

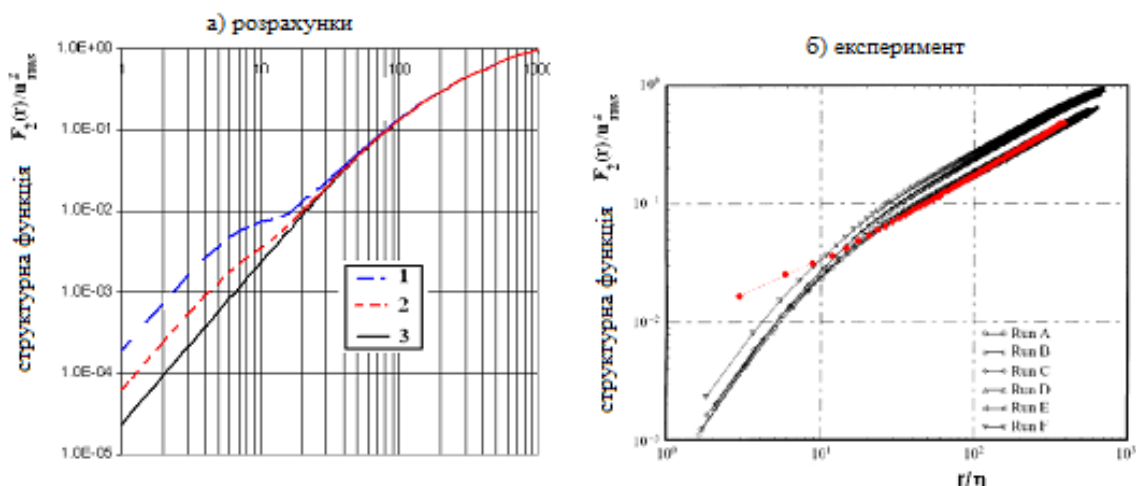


Рис. 5. Структурні функція другого порядку в залежності від безрозмірної відстані: а) розрахунки дані: 1 – енергію вкладено в 29-у октаву при $T = 300$ мкс після імпульсу, 2 - енергію вкладено в 29-у октаву при $T = 500$ мкс після імпульсу, 3 – без введення енергії; б) - експериментальні дані [15].

Ця зміна величини структурної функції зменшується з часом (крива 2 на рис.5, випадок а). Зазначимо, що одержані чисельні результати добре корелюють з експериментальними даними (криві 2 на рис.5, випадок б), що можна розглядати, як доказ запропонованої теорії.

Висновки

Розроблена модель турбулентного каскаду для стисливого середовища на основі аналізу Фур'є. Проведено аналіз впливу короткоімпульсного введення енергії на турбулентний спектр. Отримано, що введення енергії в дрібні масштаби не впливає на дилатаційну складову енергетичного спектру, але впливає на структурні функції другого порядку. Запропонована модель дозволила з'ясувати характер експериментальних залежностей при вимірюванні пульсаційних швидкостей і може бути використана для дослідження дрібномасштабної турбулентності і внутрішньої уривчастості в турбулентних потоках.

Література

1. Kida S. Energy and Spectral Dynamics in Forced Compressible Turbulence/ S. Kida, S.A. Orszag// *Journal of Scientific Computing*. – 1990. – Vol. 5, No. 2. – P.85-125.
2. Armstrong J. W. Electron density power spectrum in the local interstellar medium/ J. W. Armstrong, B. J. Rickett, S. R. Spangler// *Astrophys. J.* – 1995. – Vol. 443 – P. 209-221.
3. Deshpande A.A. Power spectrum of the density of cold atomic gas in the galaxy toward Cassiopeia and Cygnus A / A.A. Deshpande, K.S. Dwarakanath, W.M. Goss // *Astrophysical Journal*. – 2000. – Vol. 543. – P.227-234.
4. Kritsuk A.G. The statistics of supersonic isothermal turbulence/ A.G. Kritsuk, M. L. Norman, P. Padoan, R. Wagner// *The Astrophysical Journal*. – 2007. – Vol. 665. – P.416-431.
5. Federrath C. Comparing the statistics of interstellar turbulence in simulations and observations. Solenoidal versus compressive turbulence forcing/ C. Federrath, J. Roman-Duval, R. S. Klessen, W. Schmidt, M.-M. Mac Low// *Astron. Astrophys.* – 2010. – Vol. 512. – P. A81.
6. Galtier S. Exact Relation for Correlation Functions in Compressible Isothermal Turbulence/ S. Galtier, S. Banerjee// *Physical Review letters*. – 2011. – Vol. 107. – P.134501.
7. Banerjee S. Exact relation with two-point correlation functions and phenomenological approach for compressible magnetohydrodynamic turbulence/ Banerjee, S. Galtier// *Physical Review*. – 2013. – Vol. e87. – P. 013019.
8. Kritsuk A.G. Energy cascade and scaling in supersonic isothermal turbulence / A.G. Kritsuk, R. Wagner, M. L. Norman// *J. of Fluid Mechanics*. – 2013. – Vol.729. – R1.
9. Aluie H. Scale decomposition in compressible turbulence/ H. Aluie// *Physica D*. – 2013. – Vol. 247. – P. 54–65.

10. Aluie H. Conservative cascade of kinetic energy in compressible turbulence/ H.Aluie, S. Li, H. Li// *The Astrophysical Journal Letters*. – 2012. – Vol.751. – P. L29.
11. Aluie H. Compressible Turbulence: The Cascade and its Locality/ H. Aluie// *Physical review letters*. – 2011. – Vol.106. – P.174502.
12. Kim J. Density power spectrum of compressible hydrodynamic turbulent flows/ J. Kim, D. Ryu// *The Astrophysical Journal*. – 2005. – Vol. 630. –P.L45–L48.
13. Desnianslii V.N. Simulation of cascade processes in turbulent flow/ V.N. Desnianslii, E.A. Novikov// *PMM*. – 1974. – Vol. 38. – P.507-513.
14. Tropina A.A. Dynamics of a Laser-Induced Filament Supported and Controlled by a Direct Current Discharge/ A.A. Tropina, M. Shneider, R. Miles// *AIAA paper-2013-0921*, 51th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 7-10 Jan. 2013, Grapevine, Texas.
15. Michael J.B. Femtosecond laser excitation tagging for quantitative velocity imaging in air/ J.B. Michael, M.R. Edwards, A. Dogariu, R.B. Miles // *Applied Optics*. – 2011. – Vol.50, №.26. – P.5158-5162.

Рецензент: В.М. Колодяжний, д.ф.-м.н., професор, ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 23 червня 2016 р.