

УДК 514.18

## ОПИС ПРОЯВУ СОЛІТОНІВ У МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ НЕЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Г. В. Морозова, к. т. н.,

Українська державна академія залізничного транспорту, м. Харків

*Анотація.* Розглянуто приклади поодиноких (відокремлених) хвиль, що описані нелінійними диференціальними рівняннями типу  $\text{sin}$ -Гордона на прикладі впровадження солітонів під час моделювання механічних систем. За допомогою алгоритму побудови нових псевдосферичних поверхонь на основі перетворення Беклунда наведено, як можна одержати розв'язки нелінійного диференціального рівняння  $\text{sin}$ -Гордона.

*Ключові слова:* солітон, механічна система, диференціальне рівняння.

## ОПИСАНИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ СОЛИТОНОВ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Г. В. Морозова, к. т. н.,

Украинская государственная академия  
железнодорожного транспорта, г. Харьков

*Аннотация.* Рассмотрены примеры уединенных (отделенных) волн, описанных нелинейными дифференциальными уравнениями типа  $\text{sin}$ -Гордона на примере внедрений солитонов при моделировании механических систем. С помощью алгоритма построения новых псевдосферических поверхностей на основе преобразования Беклунда показано, как можно получить решения нелинейного дифференциального уравнения  $\text{sin}$ -Гордона.

*Ключевые слова:* солитон, механическая система, дифференциальное уравнение.

## DESCRIPTION OF SOLITONS BEHAVIOUR IN A MECHANICAL SYSTEMS BY NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. Morozova, Ph. D. (Eng.),

Ukrainian State Academy of Railway Transport, Kharkiv

*Abstract.* Examples of solitary (separated) waves described by nonlinear differential equations of the  $\text{sin}$ -Gordon solitons on example of solitong implementations at mechanical systems modeling are considered. Using the algorithm for constructing new pseudo-spherical surfaced based on Backlund transformation it was shown how one can get the solution of the nonlinear differential equation of  $\text{sin}$ -Gordon.

*Key words:* soliton, mechanical system, differential equation.

### Вступ

Особливе місце серед нелінійних диференціальних рівнянь займає рівняння  $\text{sin}$ -Гордона, яке описує фізичні процеси в нелінійних середовищах [1–3]. Становлення сучасної науки неможливе без їх розв'язання. Для прикладної геометрії це рівняння цікаве тим, що воно має природну графічну інтерпретацію, пов'язану з унаочненням різновидів повер-

хонь постійної від'ємної гауссової кривини (скорочено – псевдосфер). Рівняння  $\text{sin}$ -Гордона дозволяє досліджувати солітон як нелінійну поодинокую (відокремлену) хвилю у вигляді імпульсу, здатну поширюватися у нелінійному середовищі без зміни форми і втрат енергії. Поняття «солітон» започаткував британський інженер Джон Скотт Рассел (1808–1882). У 1834 році він першим описав «велику відокремлену хвилю». Солітон – це відо-

кремлена хвиля в середовищах різної фізичної природи, яка зберігає незмінною свою форму і швидкість при поширенні [4, 5].

Інтерпретація геометричного образу солітона за допомогою поверхонь постійної від'ємної кривини поєднує результати теорії нелінійних хвиль, описи диференціальної геометрії поверхонь та можливості комп'ютерної графіки [6, 7].

Шведський математик Беклунд, розглядаючи геометрію поверхонь із постійною від'ємною кривиною, в 1876 р. вказав на спосіб побудови ієрархії розв'язків рівняння  $\sin$ -Гордона, коли новий розв'язок можна знайти на базі відомих розв'язків.

### Аналіз публікацій

Для рівняння  $\sin$ -Гордона

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \psi(x, t) = a \sin(\psi(x, t)) \quad (1)$$

перетворення Беклунда можна надати [1, 2] у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi})_x &= a \sin \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi}); \\ \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi})_t &= \frac{1}{a} \sin \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi}). \end{aligned} \quad (2)$$

Диференціюючи (тут і далі похідну позначено індексом) перше рівняння по  $x$ , а друге – по  $t$ , підставляючи значення перших похідних знову з (2), додаючи або віднімаючи отримані рівняння й використовуючи тотожність  $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ , одержуємо обидві функції  $\psi$  і  $\tilde{\psi}$ , які задовольняють те саме рівняння  $\psi_{tx} = \sin \psi$ . Подібні перетворення, що пов'язують два розв'язки одного рівняння, називають автоперетворенням (або скорочено – перетворенням) Беклунда. Підставляючи у формулу (2) очевидний розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона  $\tilde{\psi}_0 = 0$  та інтегруючи один раз кожне з рівнянь, одержуємо розв'язок – «кінк» рівняння  $\sin$ -Гордона

$$\psi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp(ax + t/a + \varphi_0). \quad (3)$$

Розглянемо тепер два розв'язки (3)  $\psi_1$  і  $\psi_2$  з різними параметрами  $a_1$  і  $a_2$ . Припустимо, що один і той же розв'язок  $\psi_3$  пов'язаний пере-

творенням Беклунда із параметром  $a_1$  з розв'язком  $\psi_2$  і перетворенням Беклунда із параметром  $a_2$  з розв'язком  $\psi_1$ .

Тоді ми можемо записати перетворення Беклунда для пар  $(\psi_0, \psi_1), (\psi_0, \psi_2), (\psi_1, \psi_3)$  і  $(\psi_2, \psi_3)$ . Складаючи першу і третю пару, а потім віднімаючи від них суму другої і четвертої, одержуємо вираз без похідних, що пов'язує всі чотири розв'язки [4]

$$\begin{aligned} a_1 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3) &= \\ = a_2 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3) \end{aligned} \quad (4)$$

З формули (4) одержуємо

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_3 - \psi_0) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_2 + \psi_1). \quad (5)$$

Підставляючи розв'язки  $\psi_1$  і  $\psi_2$  із формули (3) в тотожність (5), одержуємо двосолітонний розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона у такому вигляді [5]

$$\psi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{a_1 + a_2 \exp \theta_1 - \exp \theta_2}{a_1 - a_2 + \exp(\theta_1 + \theta_2)} \right), \quad (6)$$

де  $\theta_i = a_i x + t/a_i + \varphi_i$  – фаза відповідного розв'язку.

### Мета і постановка завдання

Мета роботи – розглянути приклади поодиночок (відокремлених) хвиль, які можна описати нелінійними диференціальними рівняннями типу  $\sin$ -Гордона, та на прикладі впровадження солітонів під час моделювання механічних систем розробити спосіб унаочнення псевдосферичних поверхонь, які відповідають різновидам розв'язків диференціального рівняння  $\sin$ -Гордона і форму яких можна описати на основі перетворення Беклунда.

### Прояв солітонів у механічних системах

На рис. 1 наведено деякі приклади прояву солітонів у механічних системах, описаних нелінійним рівнянням типу  $\sin$ -Гордона. У певній механічній системі збудження (коливання) передаватимуться завдяки пружному зв'язку між сусідніми елементами, в результа-

ті чого по ланцюгу розповсюдиться солітон, описаний рівнянням  $\sin$ -Гордона [8, 9].

Наприклад, якщо у карданній передачі центральна частина обертається з непостійною кутовою швидкістю за наявності кутового зсуву поздовжньої осі вала, тоді описати коливальну систему можна рівнянням  $\sin$ -Гордона [4, 10, 11].

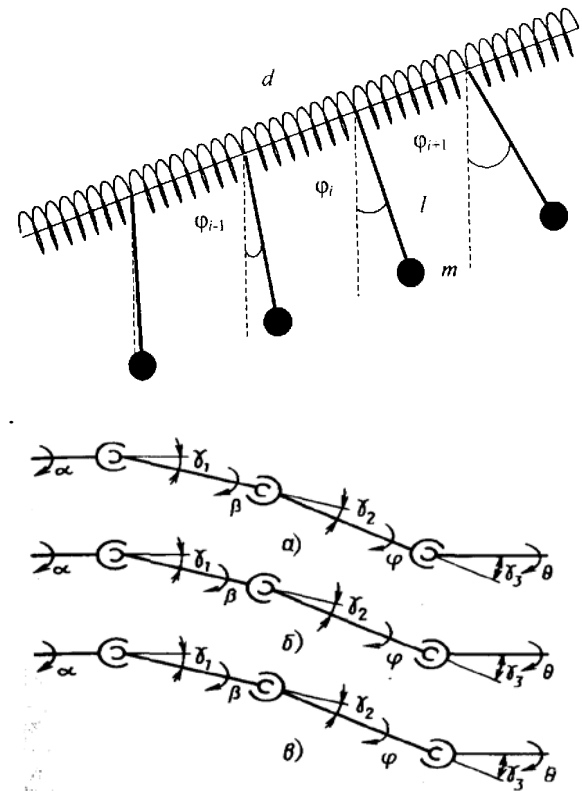
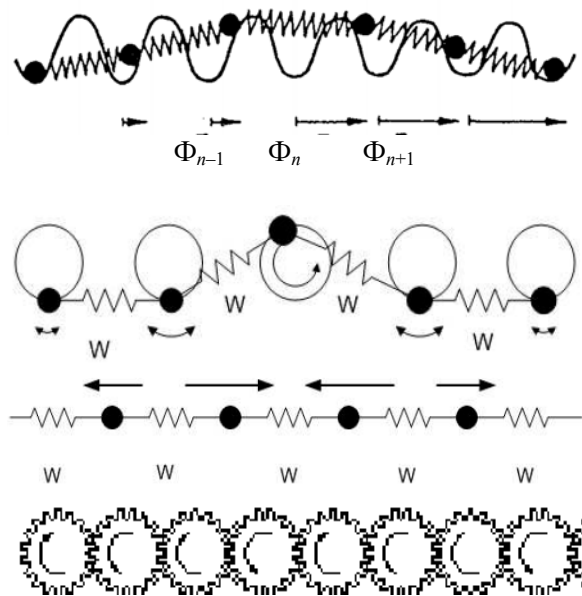


Рис. 1. Приклади механізмів, де можливе утворення аналогів поодиноких хвиль

Існує багато прикладів механізмів утворення відокремлених хвиль – аналогів солітонів.

Так, солітонна хвиля може утворитися в ланцюжку маятників, закріплених на струні й попарно з'єднаних пружинами, а також у ланцюжку карданних валів за наявності проміжків у вузлах їхніх з'єднань.

Для розробки способу унаочнення псевдосферичних поверхонь, які відповідають різновидам розв'язків диференціального рівняння  $\sin$ -Гордона, наведемо зв'язок між описами псевдосфер Діні й Куена. Нехай маємо псевдосферичну поверхню Діні, описану виразом

$$r = \begin{bmatrix} \frac{\cos(-u+v)}{\cosh(u+v)}, \frac{\sin(-u+v)}{\cosh(u+v)} \\ u+v - \tanh(u+v) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Псевдосфери Діні відповідає солітон (його позначають 1-солітон)

$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(k(x - 4k^2t))}, \quad (8)$$

графік якого [7] має вигляд горба (рис. 2).

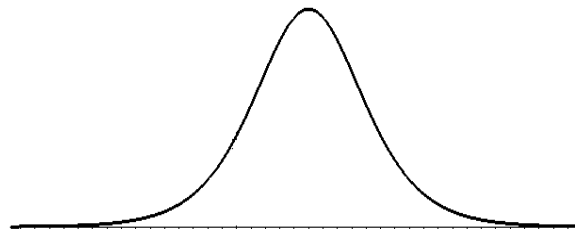
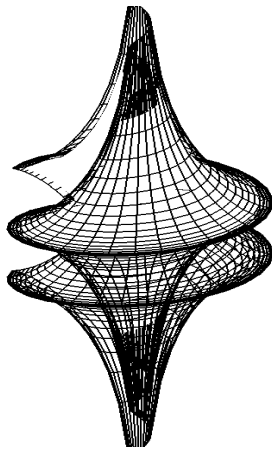


Рис. 2. Графік 1-солітона на «якісному» рівні

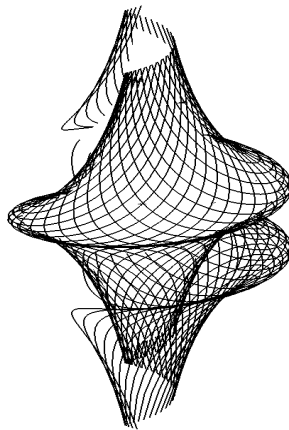
На рис. 3 зображено псевдосферу Діні для порівняння із «класичною» параметризацією (а) та з параметризацією асимптотичними кривими, тобто з мережею Чебишева (б).

З рис. 3,б видно, що величина мережного кута під час руху по поверхні Діні може змінюватися за графіком, наведеним на рис. 2.

Поставимо завдання описати й унаочнити за допомогою перетворення Беклунда поверхню Куена, використовуючи при цьому опис псевдосферичної поверхні Діні.



а



б

Рис. 3. Псевдосфера Діні з «класичною» параметризацією (а) та «репараметризована» асимптотичними кривими (б).

У середовищі процесора Maple відповідні перетворення для опису на аналітичному рівні можна здійснити [12] за допомогою операторів (тут і далі збережено синтаксис мови Maple):

**ru := diff(r, u);**

$$ru := \left[ \frac{\sin(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\cos(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \right. \\ \left. - \frac{\cos(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\sin(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \tanh(u+v)^2 \right] \quad (9)$$

**rv := diff(r, v);**

$$rv := \left[ - \frac{\sin(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\cos(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \right. \\ \left. \frac{\cos(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\sin(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \tanh(u+v)^2 \right] \quad (10)$$

Двосолітонний розв'язок, одержаний як перетворення Беклунда

$$z2pq := 4 \cdot \arctan\left(\frac{\exp(p \cdot u + v/p) - \exp(q \cdot u + v/q) \cdot (p+q)}{(1 + \exp(p \cdot u + v/p + q \cdot u + v/q)) / (p-q)}\right);$$

$$z2pq := 4 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v+q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \quad (11)$$

$$z1p := 4 \cdot \arctan \left( \exp(p \cdot u + v/p) \right);$$

$$z1p := 4 \arctan(e^{(u+v)}). \quad (12)$$

$$\text{sinsin1} := \sin((z1p + z2pq)/2) / \sin(z1p);$$

$$\text{sinsin1} := \frac{\sin \left( 2 \arctan(e^{(u+v)}) + 2 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v+q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \right)}{\sin(4 \arctan(e^{(u+v)}))} \quad (13)$$

$$\text{sinsin2} := \sin((z1p - z2pq)/2) / \sin(z1p);$$

$$\text{sinsin2} := \frac{\sin \left( 2 \arctan(e^{(u+v)}) - 2 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v+q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \right)}{\sin(4 \arctan(e^{(u+v)}))} \quad (14)$$

Визначаються координатні функції опису результуючої поверхні.

```
for i from 1 to 3 do
rr[i] := r[i] + 2*p*(ru[i]*sinsin1 +
rv[i]*sinsin2)/(1 + p^2);
end;
R := [rr[1], rr[2], rr[3]];
```

Після присвоєння необхідних значень параметрам  $p$  і  $q$  виконується унаочнення одержаного опису за допомогою оператора

```
plot3d(R, u=-Pi..Pi, v=-Pi..Pi,
scaling=constrained,
axes=BOXED, view=[-2..2,-2..2,-6..6],
orientation=[-120,70]);
```

Приклад. Для  $p = 1$  і  $q = 0,98$  одержано такі складові частини елементів перетворення Беклунда:

$$z2pq = 4 \arctan \times \left( \frac{99.00000000 (e^{(u+v)} - e^{(0.98u+1.020408163v)})}{1 + e^{(1.98u+2.020408163v)}} \right);$$

$$z1p := 4 \arctan(e^{(u+v)});$$

$$\sin \sin 1 := \frac{\sin \frac{z1p}{2} + \frac{z2pq}{2}}{\sin(z1p)};$$

$$\sin \sin 2 := \frac{\sin \left( \frac{z1p}{2} - \frac{z2pq}{2} \right)}{\sin(z1p)};$$

$$x := r_1 + ru_1 \sin \sin 1 + rv_1 \sin \sin 2 ;$$

$$y := r_2 + ru_2 \sin \sin 1 + rv_2 \sin \sin 2 ;$$

$$z := r_3 + ru_3 \sin \sin 1 + rv_3 \sin \sin 2 .$$

На рис. 4 залежно від  $p$  і  $q$  зображено «некласичні» поверхні псевдосфери Куена, опис і унаочнення яких здійснено за допомогою перетворення Беклунда.

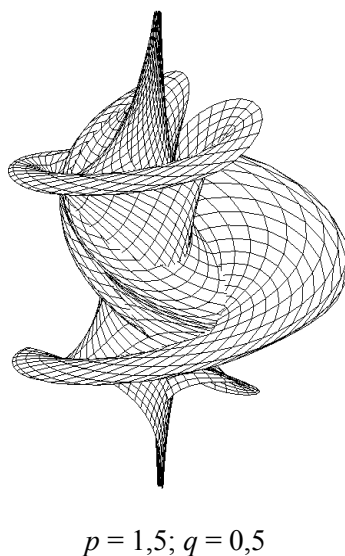
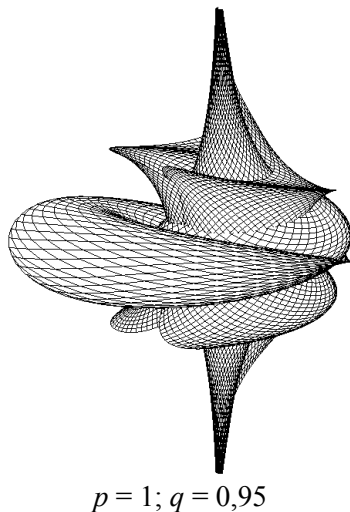


Рис. 4. Зображення псевдосфери Куена залежно від  $p$  і  $q$

При цьому опис мережі асимптотичних ліній

$$v(u) = \arctan \left( \frac{2e^{(-u)} - C1}{-C1^2 + e^{(-2u)}}, \frac{-e^{(-2u)} + C1^2}{-C1^2 + e^{(-2u)}} \right);$$

$$v(u) = \arctan \left( \frac{2e^{(-u)} - C1}{1 + e^{(2u)} - C1^2}, \frac{e^{(2u)} - C1^2 - 1}{1 + e^{(2u)} - C1^2} \right) \quad (15)$$

на псевдосфері Куена було знайдено із диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{du} v(u) = -\sin(v(u)), \quad \frac{d}{du} v(u) = \sin(v(u)). \quad (16)$$

На рис. 5 наведено зображення «класичної» псевдосфери Куена, причому на рис 5,а зображено її «стандартну» параметризацію, а на рис. 5,б – репараметризовану поверхню за допомогою асимптотичних кривих, які утворюють мережу Чебишева.

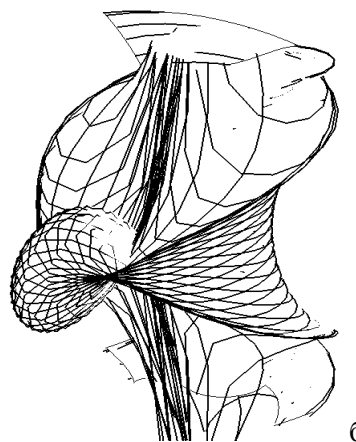
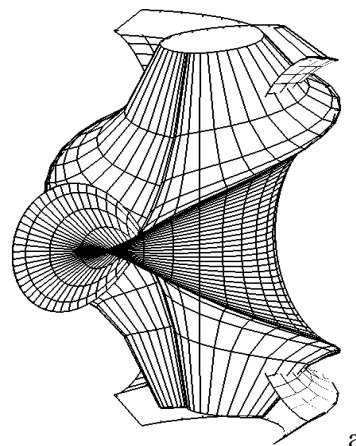


Рис. 5. Псевдосфера Куена із «класичною» параметризацією (а) та «репараметризована» асимптотичними кривими (б)

Аналіз переміщення по мережі Чебишева псевдосфери Куена на якісному рівні дозволяє зробити висновок, що «узагальнений» солітон має вигляд «процесу взаємодії» двох солітонів (рис. 6).

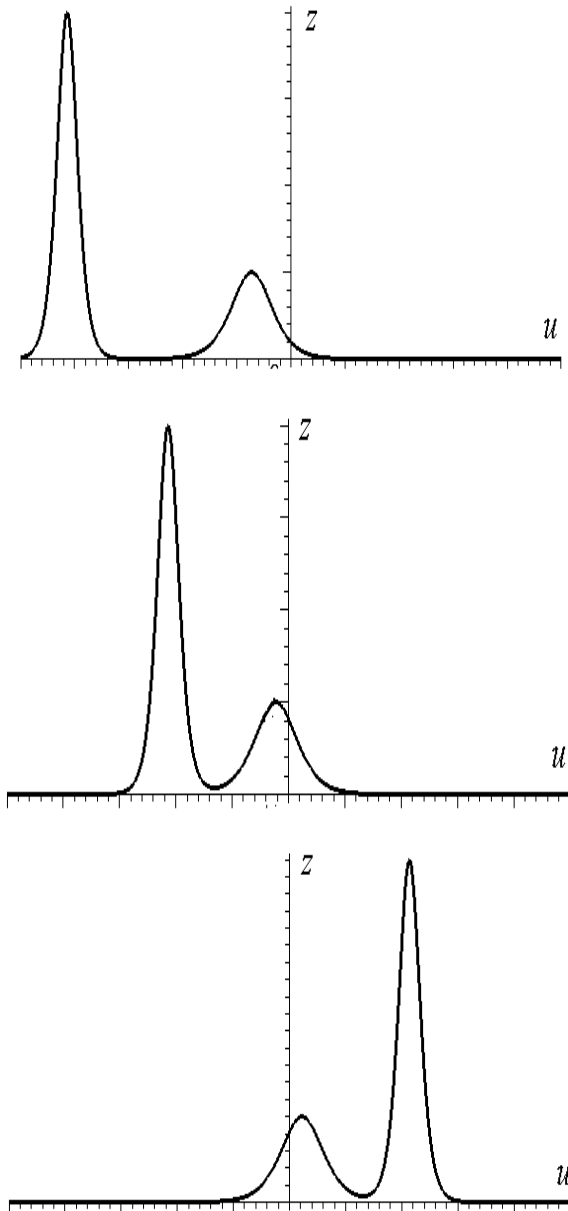


Рис. 6. Результат взаємодії двох солітонів у певні моменти часу

Поверхні Куена відповідає розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона [6] у вигляді опису 2-солітона, узагальнене рівняння якого має вигляд

$$u = -2 \frac{k_1^2 k_2^2 (\cosh^2 K_1 - \cosh^2 K_2 + 1) + k_1^4 (\cosh^2 K_2 - 1) - k_2^4 \cosh^2 K_1}{(k_1 \sinh K_2 \sinh K_1 - k_2 \cosh K_1 \cosh K_2)^2}, \quad (17)$$

де  $K_1 = k_1(x - 4k_1^2 t)$ ;  $K_2 = k_2(x - 4k_2^2 t)$ .

## Висновки

Розглянувши приклади поодиноких (відокремлених) хвиль, що описані нелінійними диференціальними рівняннями типу  $\sin$ -Гордона, та на прикладі впровадження солітонів під час моделювання механічних систем доведено, що за формулою (17) можна побудувати анімаційні кадри взаємодії двох солітонів, причому пара солітонів буде описана єдиним рівнянням (17).

За допомогою алгоритму побудови нових псевдосферичних поверхонь на основі перетворення Беклунда можна одержати розв'язки нелінійного диференціального рівняння  $\sin$ -Гордона.

## Література

1. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Лэм Дж. Л. – Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 296 с.
2. Маевский Е. В. Асимптотические методы в некоторых задачах математической физики, связанных с уравнениями типа  $\sin$ -Гордона и геометрией псевдосферических поверхностей: дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.03 – математическая физика / Е. В. Маевский. – М., 2004. – 124 с.
3. Попов А. Г. Аналитические подходы к исследованию уравнений  $\sin$ -Гордона и псевдосферических поверхностей / А. Г. Попов, Е. В. Маевский // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Том 31. – С. 13–52.
4. Кудряшов Н. А. Нелинейные волны и солитоны / Н. А. Кудряшов // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 2. – С. 85–91.
5. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл; пер. с англ. И. Р. Габитова и др.; под ред. А. В. Михайлова. – М.: Мир, 1989. – 324 с.
6. Новокшенов В. Ю. Введение в теорию солитонов / В. Ю. Новокшенов. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 96 с.
7. Позняк Э. Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика. Новое в жизни, науке, технике / Э. Г. Позняк, А. Г. Попов. – М.: Знание, 1991. – Серия «Математика, кибернетика». Т. 6. – 1991. – 44 с.

8. Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах / А. С. Давыдов. – 2-е изд., испр., перераб. и доп. – К.: Наукова думка, 1988. – 304 с.
  9. Филиппов А. Т. Многоликий солитон. / А. Т. Филиппов // Квант. – 1986. – Вып. 48. – С. 97–99.
  10. Юркевич В. Э. Физика солитонов / В. Э. Юркевич, Б. Н. Ролов. – Рост. н/Д.: гос. пед. ин-т, 1985. – 192 с.
  11. Дмитриев П. Е. Теория солитонов в работе карданных передач. [Электронный ресурс] / П. Е. Дмитриев. – Режим доступа: [http://www.nntu.nnov.ru/RUS/NEWS/futuretechnology/s4p1\\_05.rtf](http://www.nntu.nnov.ru/RUS/NEWS/futuretechnology/s4p1_05.rtf)
  12. Мисюра М. І. Геометричне моделювання усамітнених хвиль методом псевдосфер: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка / М. І. Мисюра. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – 164с.
- Рецензент: Ю. В. Батигін, професор, д. т. н., ХНАДУ.
- Стаття надійшла до редакції 12 лютого 2014 р.
-