УДК 534

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ В.Ф. КРОТОВА – Р. БЕЛЛМАНА В СИНТЕЗЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ АВТОМОБИЛЬНЫХ КРАНОВ

Ю.В. Човнюк, доцент, к.т.н., М.Г. Диктерук, доцент, к.т.н., К.И. Почка, доцент, к.т.н, Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Аннотация. *Приведен синтез линейных регуляторов для задач оптимального управления нестационарными колебаниями, возникающими в режимах пуска/торможения автомобильных кранов. Для обоснования достаточных условий оптимальности решения указанной задачи, сформулированных В.Ф. Кротовым, установлено и решено методом неопределённых коэффициентов уравнение Р. Беллмана.*

Ключевые слова: *синтез, линейные регуляторы, оптимальное управление, нестационарные колебания, автомобильные краны.*

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ В.Ф. КРОТОВА – Р. БЕЛЛМАНА У СИНТЕЗІ ЛІНІЙНИХ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМИ КОЛИВАННЯМИ АВТОМОБІЛЬНИХ КРАНІВ

Ю.В. Човнюк, доцент, к.т.н., М.Г. Діктерук, доцент, к.т.н., К.І. Почка, доцент, к.т.н., Київський національний університет будівництва і архітектури

Анотація. *Наведено синтез лінійних регуляторів для задач оптимального управління нестаціонарними коливаннями, що виникають у режимах пуску/гальмування автомобільних кранів. Для обґрунтування достатніх умов оптимальності розв'язку вказаної задачі, сформульованих В.Ф. Кротовим, встановлене й розв'язане методом невизначених коефіцієнтів рівняння Р. Беллмана.*

Ключові слова: *синтез, лінійні регулятори, оптимальне управління, нестаціонарні коливання, автомобільні крани.*

APPLICATION OF KROTOV – BELLMAN FUNCTION IN THE SYNTHESIS OF LINEAR REGULATORS FOR PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL OF NON-STATIONARY OSCILLATIONS FOR TRUCK-MOUNTED CRANES

Yu. Chovnyuk, Associate Professor, Candidate of Engineering Sciences, K. Pochka, Associate Professor, Candidate of Engineering Sciences, M. Dykteruk, Associate Professor, Candidate of Engineering Sciences, Kyiv National University of Construction and Architecture

Abstract. *The synthesis of linear regulators for optimal control problems of non-stationary oscillations arising in starting and braking modes of truck-mounted cranes has been done. To substantiate sufficient optimality conditions, formulated by V. Krotov, Bellman equation has been set and solved by the method of undetermined coefficients.*

Key words: *synthesis, linear regulators, optimal control, non-stationary oscillations, truck-mounted cranes.*

Введение

Изучение нестационарных колебательных процессов в механических деформируемых системах, в частности в автомобильных кранах, представляет большой интерес для современной техники в связи со значительным увеличением мощностей и скоростей движения машин.

Нестационарные колебания элементов автокрана, его двигателя внутреннего сгорания, корпуса на рессорах, колёс возникают при неустановившихся режимах работы, пуске и остановке, балансировке крана и т.д.

Наиболее полно изучены нестационарные колебания при переходе через резонанс линейных систем. Однако исчерпывающего решения задач синтеза линейных регуляторов для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов, доведенного до практических применений, для многих линейных задач не было.

Анализ публикаций

Необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления были сформулированы Л.С. Понтрягиным в 1956 г. [2]. Достаточные условия обоснованы В.Ф. Кротовым [1]. Авторы [3–5] используют уравнение и функцию Р. Беллмана для установления оптимального управления движением механических систем, а также технологическими процессами.

В данной работе использован именно такой подход для оптимизации переходных процессов, связанных с колебаниями автомобильных кранов, возникающими в режимах их пуска/торможения, смены режима движения [6–10].

Цель работы

Состоит в синтезе линейных регуляторов для задач оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов. Для достижения указанной цели используется подход В.Ф. Кротова, устанавливается и решается уравнение Р. Беллмана, определяются параметры линейного регулятора, обеспечивающего оптимальный закон управления и движения автомобильного крана. Коэффициенты функции Р. Беллмана находятся способом, приведенным в [4, 5].

Анализ колебаний автомобильного крана

Вначале определим частоты колебаний, предположив, что собственная частота вертикальных колебаний колёс значительно выше собственной частоты колебаний корпуса на рессорах [10].

Вследствие большого различия собственных частот колёс и корпуса систему, схематизирующую движение корпуса автокрана на рессорах, можно представить в виде упруго подвешенного твёрдого тела (рис. 1). Такая система обладает двумя степенями свободы.

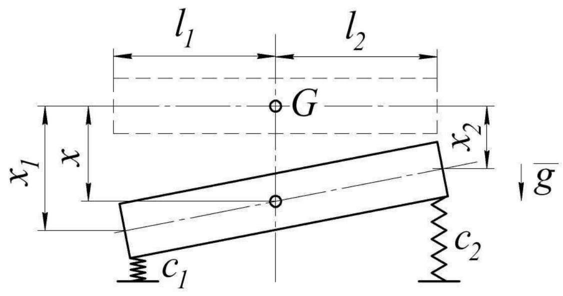

Рис. 1. Расчётная схема задачи

В качестве обобщённых координат, определяющих положение системы при колебаниях, примем вертикальное перемещение x центра масс автокрана (G) и угол φ поворота корпуса вокруг центра масс. Пусть m – масса автокрана, а J – момент инерции относительно оси, проходящий через центр масс, g – ускорение свободного падения.

Кинетическая энергия системы определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2 . \qquad (1)$$

Составим выражение потенциальной энергии упругих сил рессор.

Из рис. 1 следует, что деформации рессор x_1 и x_2 можно определить по формулам

$$x_1 \approx x + l_1 \cdot \varphi ; \qquad x_2 \approx x - l_2 \cdot \varphi . \qquad (2)$$

Потенциальная энергия упругих сил определяется по формуле

$$\Pi = \frac{1}{2}\cdot c_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2}\cdot c_2 \cdot x_2^2 = \\ = \frac{1}{2}\cdot c_1 \cdot \left(x + l_1 \cdot \varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot c_2 \cdot \left(x - l_2 \cdot \varphi\right)^2. \quad (3)$$

Уравнения колебаний рассматриваемой системы записываются в виде

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} + \left(C_1 + C_2\right)\cdot x + \left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)\cdot \varphi = 0; \\ J \cdot \ddot{\varphi} + \left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)\cdot x + \\ + \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)\cdot \varphi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Полагая

$$x = A_1 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t + \delta\right);\ \varphi = A_2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t + \delta\right), \quad (5)$$

найдём

$$\ddot{x} = -A_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t + \delta\right); \\ \ddot{\varphi} = -A_2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t + \delta\right). \quad (6)$$

Подставив x, φ и $\ddot{x}$, $\ddot{\varphi}$ в уравнения (4), получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \left(C_1 + C_2 - m \cdot \lambda^2\right) & \left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right) \\ \left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right) & \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2 - J \cdot \lambda^2\right) \end{vmatrix} = 0 . \quad (7)$$

Раскрывая определитель в (7) и выполняя очевидные алгебраические преобразования, получим характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^4 - \left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J}\right)\cdot \lambda^2 + \\ + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{m \cdot J} = 0. \quad (8)$$

Вычислив корни характеристического уравнения (8), найдём собственные частоты

$$\Omega_{1,2} = \left\{ \frac{1}{2}\cdot \left[\begin{array}{c} \left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J}\right) \pm \\ \pm \sqrt{\left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J}\right)^2 - \\ - \frac{4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{m \cdot J}} \end{array} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Синтез линейного регулятора для задачи оптимального управления нестационарными колебаниями автокрана в режиме пуска/торможения

Рассмотрим минимизацию угловых колебаний автокрана.

Для этого первое уравнение системы (4) можно найти

$$\phi = \frac{-\left(m \cdot \ddot{x} + \left(C_1 + C_2\right)\cdot x\right)}{\left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)}. \quad (10)$$

Двукратное дифференцирование этого выражения по t (времени) даёт

$$\ddot{\phi} = \frac{-\left(m \cdot x^{(IV)} + \left(C_1 + C_2\right)\cdot \ddot{x}\right)}{\left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)}. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) во второе уравнение системы (4), получим

$$x^{(IV)} + \frac{\left[\left(C_1 + C_2\right)\cdot J + \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)\cdot m\right]}{J \cdot m} \times \\ \times \ddot{x} + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m}\cdot x = 0. \quad (12)$$

Считая период разгона/торможения автокрана равным T, введём критерий качества движения машины, при котором минимальны угловые его (автокрана) колебания

$$\int_0^T \varphi^2 dt \Rightarrow \min . \quad (13)$$

Учитывая соотношение (10), критерий (13) можно представить иначе

$$\int_0^T \left(m \cdot \ddot{x} + \left[C_1 + C_2\right]\cdot x\right)^2 dt \Rightarrow \min . \quad (14)$$

Необходимое условие реализации критерия (14), а значит, и (13), есть уравнение Эйлера

$$x^{(IV)} + 2 \cdot \Omega^2 \cdot \ddot{x} + \Omega^4 \cdot x = 0; \\ \Omega^2 = \frac{\left(C_1 + C_2\right)}{m}. \quad (15)$$

Вычитая (15) из (12), получаем уравнение, определяющее закон движения $x(t)$, при котором минимальны угловые колебания автокрана в процессе его разгона (пуска/торможения)

$$\left[\frac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2\right] \cdot \ddot{x} + \left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4\right] \cdot x = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) можно представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_{\varphi_{\min}}^2 \cdot x = 0\,, \tag{17}$$

где

$$\omega_{\varphi_{\min}}^2 = \frac{\left[\dfrac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4\right]}{\left[\dfrac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2\right]}. \tag{18}$$

Возможны три случая, которые определяют оптимальный (в смысле минимизации угла поворота корпуса автокрана φ) закон движения машины $x(t)$

а) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 > 0$; при этом выполняются неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 > 0; \\ \dfrac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2 > 0; \end{cases}$$

либо (19)

$$\begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 < 0; \\ \dfrac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2 < 0. \end{cases}$$

Закон движения $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega_{\varphi_{\min}} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\omega_{\varphi_{\min}} \cdot t\right). \tag{20}$$

б) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 < 0$; при этом выполняются неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 > 0\ ; \\ \dfrac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2 < 0\ ; \end{cases}$$

либо (21)

$$\begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 < 0\ ; \\ \dfrac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)}{J} - \Omega^2 > 0\ . \end{cases}$$

Закон движения $x(t)$ имеет в этом случае вид

$$x(t) = A \cdot \exp\left(-\left|\omega_{\varphi_{\min}}^1\right| \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(+\left|\omega_{\varphi_{\min}}^1\right| \cdot t\right). \tag{22}$$

в) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 = 0$; при этом выполняется равенство

$$\Omega^4 = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m} \Rightarrow \Rightarrow \frac{\left(C_1 + C_2\right)^2}{m^2} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J \cdot m}. \tag{23}$$

Закон движения $x(t)$ имеет вид для этого случая

$$x(t) = A + B \cdot t\,. \tag{24}$$

Следует подчеркнуть, что константы A и B в (20), (22) и (24) определяются из начальных условий задачи.

Далее представлена минимизация линейных (вертикальных) колебаний автокрана.

Из второго уравнения системы (4) можно найти

$$x = \frac{-\left(J \cdot \ddot{\varphi} + \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right) \cdot \varphi\right)}{\left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)}. \tag{25}$$

Двукратное дифференцирование этого выражения по t даёт

$$\ddot{x} = \frac{-\left(J \cdot \varphi^{(IV)} + \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right) \cdot \ddot{\varphi}\right)}{\left(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2\right)}. \tag{26}$$

Подставляя (25) и (26) в первое уравнение системы (4), получим

$$\varphi^{(IV)} + \frac{\left[\left(C_1 + C_2\right)\cdot J + \left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)\cdot m\right]}{J\cdot m}\times$$
$$\times\ddot{\varphi} + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m}\cdot\varphi = 0. \qquad (27)$$

Критерий качества движения машины теперь приобретает следующий вид

$$\int_0^T x^2 dt \Rightarrow \min . \qquad (28)$$

Учитывая соотношение (25), критерий (28) можно представить следующим образом

$$\int_0^T \left(J\cdot\ddot{\varphi} + \left[C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right]\cdot\varphi\right)^2 dt \Rightarrow \min. \qquad (29)$$

Необходимое условие реализации критерия (29), а значит, и (28), есть уравнение Эйлера

$$\varphi^{(IV)} + 2\cdot\tilde{\Omega}^2\cdot\ddot{\varphi} + \tilde{\Omega}^4\cdot\varphi = 0 ;$$
$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)^1}{J^1} . \qquad (30)$$

Вычитая (30) из (27), получаем уравнение, определяющее закон движения $\varphi(t)$, при котором минимальны линейные колебания по оси OX автокрана в процессе его разгона (пуска/торможения)

$$\left[\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2\right]\cdot\ddot{\varphi} +$$
$$+\left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4\right]\cdot\varphi = 0. \qquad (31)$$

Уравнение (31) можно представить в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_{x_{\min}}^2 \cdot\varphi = 0 , \qquad (32)$$

где

$$\omega_{x_{\min}}^2 = \frac{\left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4\right]}{\left[\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2\right]}. \qquad (33)$$

Возможны три случая, которые определяют оптимальный (в смысле минимизации линейного перемещения вдоль оси OX корпуса автокрана) закон движения машины $\varphi(t)$:

а) $\omega_{x_{\min}}^2 > 0$; при этом выполняются неравенства

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4 > 0 \ ; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 > 0 \ ; \end{cases}$$

либо (34)

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4 < 0 \ ; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 < 0 \ . \end{cases}$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \tilde{A}\sin\left(\omega_{x_{\min}}\cdot t\right) + \tilde{B}\cos\left(\omega_{x_{\min}}\cdot t\right). \qquad (35)$$

б) $\omega_{x_{\min}}^2 < 0$; при этом выполняются неравенства

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4 < 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 > 0; \end{cases}$$

либо (36)

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} - \tilde{\Omega}^4 > 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 < 0. \end{cases}$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет в этом случае вид

$$\varphi(t) = \tilde{A}\exp\left(-\left|\omega_{x_{\min}}\right|\cdot t\right) +$$
$$+\tilde{B}\exp\left(+\left|\omega_{x_{\min}}\right|\cdot t\right). \qquad (37)$$

в) $\omega_{x_{\min}}^2 = 0$; при этом выполняется равенство

$$\tilde{\Omega}^4 = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\left(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2\right)^2}{J^2} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(l_1 + l_2\right)^2}{J\cdot m}. \qquad (38)$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет вид для этого случая

$$\phi(t) = \tilde{A} + \tilde{B}t . \qquad (39)$$

Константы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в (35), (37) и (39) определяются из начальных условий задачи.

Рассмотрим задачу синтеза оптимального линейного регулятора переходного процесса в автокране, работающем в режимах пуска/торможения. При этом критерий качества движения выберем в виде

$$I=\int_0^1\left[\begin{array}{l}\gamma_1\cdot\left(\phi^{(IV)}\right)^2+\gamma_2\cdot\left(\dddot{\phi}\right)^2+\gamma_3\times\\ \times\left(\ddot{\phi}\right)^2+\gamma_4\cdot\phi^2+\gamma_5\cdot u^2\end{array}\right]d\tau\Rightarrow\max, \quad (40)$$

где $\tau={t}/{T}$; T – продолжительность переходного процесса; $\gamma_{1,2,3,4,5}$ – неотрицательные весовые коэффициенты. Уравнения связей при этом приобретают следующий вид

$$\begin{cases}\phi(0)=\dot{\phi}(0)=\ddot{\phi}(0)=\dddot{\phi}(0)=0\ ;\\ \ddot{\phi}=a\cdot\phi+b\cdot u\ ;\qquad u\equiv x\ ;\\ a=-\dfrac{\left(C_1\cdot l_1^2+C_2\cdot l_2^2\right)}{J}\ ;\\ b=-\dfrac{\left(C_1\cdot l_1-C_2\cdot l_2\right)}{J}\ ;\\ \phi^{(IV)}+\tilde{a}\cdot\ddot{\phi}+\tilde{b}\cdot\phi=0\ ;\\ \tilde{a}=\dfrac{\left(C_1+C_2\right)\cdot J+\left(C_1\cdot l_1^2+C_2\cdot l_2^2\right)\cdot m}{J\cdot m}\ ;\\ \tilde{b}=\dfrac{C_1\cdot C_2\cdot\left(l_1+l_2\right)^2}{J\cdot m}\ .\end{cases}\quad (41)$$

Уравнение Р. Беллмана для этой задачи запишется как

$$\psi_t=-\max\left[\begin{array}{l}-\gamma_1\cdot\left(\phi^{(IV)}\right)^2-\gamma_2\cdot\left(\dddot{\phi}\right)^2-\\ -\gamma_3\cdot\left(\ddot{\phi}\right)^2-\gamma_4\cdot\phi^2-\gamma_5\cdot u^2+\\ +\psi_\phi\cdot\dot{\phi}+\psi_{\dot{\phi}}\cdot\left(a\cdot\phi+b\cdot u\right)\end{array}\right].\quad (42)$$

Так как ограничения на управление u отсутствуют (главная задача состоит в уменьшении колебаний автокрана по ϕ), и выражение, стоящее в квадратных скобках, выпукло по u, найдём $u^*\left(\phi,\dot{\phi},t\right)$ из условия стационарности этого выражения

$$u^*\left(\phi,\dot{\phi},t\right)=\frac{b}{2\cdot\gamma_5}\cdot\psi_{\dot{\phi}}\left(\phi,\dot{\phi},t\right);\quad (43)$$

($u^*\left(\phi,\dot{\phi},t\right)$ – оптимальное решение),

и подставим u^* в (42)

$$\begin{array}{l}\psi_t=\gamma_1\cdot\left(\phi^{(IV)}\right)^2+\gamma_2\cdot\left(\dddot{\phi}\right)^2+\gamma_3\cdot\left(\ddot{\phi}\right)^2+\\ +\gamma_4\cdot\phi^2-\psi_\phi\cdot\dot{\phi}-\psi_{\dot{\phi}}\cdot a\cdot\phi-\dfrac{b^2}{4\cdot\gamma_5}\cdot\psi_{\dot{\phi}}^2\,.\end{array}\quad (44)$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению в частных производных обычного типа, не содержащему операции максимума. Одним из способов решения таких уравнений является задание вида предполагаемого решения с точностью до коэффициентов с последующим определением их. Зададим $\psi\left(\phi,\dot{\phi},t\right)$ в форме

$$\psi\left(\phi,\dot{\phi},t\right)=A_1\cdot\dot{\phi}^2+2\cdot B_1\cdot\dot{\phi}\cdot\phi+C_1\cdot\phi^2\quad (45)$$

и подставим в (44), учитывая (41). Приравнивая коэффициенты при ϕ, $\dot{\phi}$ и $\phi\cdot\dot{\phi}$ в левой и правой частях получившегося выражения, найдём коэффициенты A_1, B_1 и C_1 из следующей нелинейной системы уравнений:

а) для B_1

$$\begin{array}{l}2\cdot B_1\cdot\left(a+\dfrac{b^2}{\gamma_5}\cdot B_1\right)=\\ =\gamma_1\cdot\left(a\cdot\tilde{a}+\tilde{b}+\dfrac{b^2\cdot\tilde{a}\cdot B_1}{\gamma_5}\right)^2+\\ +\gamma_2\cdot\left(a+\dfrac{b^2\cdot B_1}{\gamma_5}\right)^2+\gamma_4-2\cdot B_1\cdot a-\dfrac{b^2}{\gamma_5}\cdot B_1^2;\end{array}\quad (46)$$

б) для A_1 (при найденном из (46) B_1)

$$\begin{array}{l}2\cdot A_1^2\cdot\dfrac{b^2}{\gamma_5}+2\cdot B_1=\gamma_1\cdot\left(\tilde{a}\cdot\dfrac{b^2}{\gamma_5}\cdot A_1\right)^2+\\ +\gamma_2\cdot\dfrac{b^4\cdot A_1^2}{\gamma_5^2}+\gamma_3-2\cdot B_1-\dfrac{b^2}{\gamma_5}\cdot A_1^2\ ;\end{array}\quad (47)$$

в) для C_1 (при найденных из (46) B_1 и из (47) A_1)

$$A_1 \cdot (a + 2 \cdot B_1) + B_1 \cdot \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 + C_1 =$$

$$= \gamma_1 \cdot \left(\partial\text{‰}a + b\text{‰} \frac{b^2 \cdot \partial\text{‰}B_1}{\gamma_5} \right) \cdot \partial\text{‰}\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 +$$

$$+\gamma_2 \cdot \left(a + \frac{b^2 \cdot B_1}{\gamma_5} \right) \cdot \frac{b^2 \cdot A_1}{\gamma_5} - \qquad (48)$$

$$-C_1 - A_1 \cdot a - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 \cdot B_1.$$

Зная A_1, B_1 и C_1 из системы уравнений (46)–(48), находим $u^*(\phi, \dot{\phi}, t)$

$$u^*(\phi, \dot{\phi}, t) = +\frac{b}{2 \cdot \gamma_5} \cdot \{2 \cdot A_1 \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot B_1 \cdot \phi\} =$$

$$= \frac{b}{\gamma_5} \cdot \{A_1 \cdot \dot{\phi} + B_1 \cdot \phi\} \; . \qquad (49)$$

Начальные условия для ϕ и его производных по t (τ) заданы (41), поэтому, подставляя $u^*(\phi, \dot{\phi}, t)$ в уравнения связей (41), получаем $\phi^*(t)$, которое ввиду отсутствия ограничений на ϕ допустимо, а в силу теоремы В.Ф. Кротова [5] оптимально. Отметим, что оптимальное решение в форме синтеза (49) линейно зависит от переменных состояния автокрана (ϕ, $\dot{\phi}$), то есть оптимальным регулятором в данной задаче оказывается линейный регулятор (по углу ϕ и по угловой скорости $\dot{\phi}$).

Уравнение для $\phi^*(t)$ имеет следующий вид

$$\ddot{\phi}^* - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 \cdot \dot{\phi}^* - \left(a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \cdot \phi^* = 0 . \qquad (50)$$

Характеристическое уравнение для (50) сводится к

$$\lambda^2 - \frac{b^2 \cdot A_1}{\gamma_5} \cdot \lambda - \left(a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) = 0 . \qquad (51)$$

Возможны три варианта решений $\phi^*(t)$ (50):

1) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} > 0 , \qquad (52)$$

тогда $\lambda_{1,2}$ – действительные корни, определяемые соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{b^2 \cdot A_1}{2 \cdot \gamma_5} \pm \left\{ \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right\}^{\frac{1}{2}} ; \qquad (53)$$

$$\phi^*(t) = \overline{\overline{C}}_1 \cdot \exp\{\lambda_1 \cdot t\} + \overline{\overline{C}}_2 \cdot \exp\{\lambda_2 \cdot t\} ; \qquad (54)$$

2) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} < 0 , \qquad (55)$$

тогда

$$\phi^*(t) = \overline{\overline{D}}_1 \cdot \exp\left\{ \frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5} \right\} \times$$

$$\times \sin\left[\left| \left(\frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] +$$

$$+\overline{\overline{D}}_2 \cdot \exp\left\{ \frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5} \right\} \times \qquad (56)$$

$$\times \cos\left[\left| \left(\frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] ;$$

2) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} = 0 , \qquad (57)$$

тогда:

$$\phi^*(t) = \exp\left\{ \frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5} \right\} \cdot \left(\overline{\overline{E}}_1 + \overline{\overline{E}}_2 \cdot t \right) . \qquad (58)$$

Константы $\overline{\overline{C}}_1$, $\overline{\overline{C}}_2$, $\overline{\overline{D}}_1$, $\overline{\overline{D}}_2$, $\overline{\overline{E}}_1$, $\overline{\overline{E}}_2$ находим из начальных (ненулевых) условий.

Весовые множители $\gamma_1 - \gamma_5$ в критерии (40) можно определить следующим образом. Если нормировать u на характерный в задаче размер $\Delta = \frac{m \cdot g}{(C_1 + C_2)}$, а ϕ на $(\Omega^* \cdot T)$, где $\Omega^* = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \omega^*(t) dt$, $\omega^*(t)$ – мгновенная частота процесса (колебательного), определяемая по методике [11] с помощью интегрального преобразования Гильберта для $\phi(t)$, тогда под знаком интеграла в (40) все величины становятся безразмерными (производные берутся по безразмерному времени τ^*), а для весовых коэффициентов получим

$$\gamma_5 = 1; \quad \gamma_4 = \left(\Omega^* \cdot T\right)^2;$$
$$\gamma_3 = \left(\Omega^*\right)^4 \cdot T^4; \qquad (59)$$
$$\gamma_2 = \left(\Omega^*\right)^6 \cdot T^6; \quad \gamma_1 = \left(\Omega^*\right)^{10} \cdot T^{10}.$$

При этом пределы интегрирования в (40) по $\tau^* = \Omega^* \cdot t$ изменяются – от 0 до $\Omega^* \cdot T$.

Выводы

1. Проведен всесторонний анализ задачи синтеза линейного регулятора для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов в рамках теории В.Ф. Кротова–Р. Беллмана. Получено уравнение Р. Беллмана и его решение, позволяющие определить параметры линейного регулятора продольно-угловых колебаний автокрана, который удовлетворяет заданному критерию качества движения всей системы (минимальным колебаниям платформы относительно положения равновесия).

2. Результаты работы могут в дальнейшем быть использованы для уточнения и усовершенствования существующих методов синтеза линейных регуляторов для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов в процессах их разгона/торможения, перехода на другой режим функционирования как при проектировании/конструировании подобных регуляторов, так и на стадии их реальной эксплуатации в системе автоматического управления автокраном посредством имеющихся в наличии мехатронных устройств.

Литература

1. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
2. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 360 с.
3. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. Цирлин А.М. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов / А.М. Цирлин, В.С. Балакирев, Е.Г. Дудников. – М.: Энергия, 1976. – 448 с.
5. Цирлин А.М. Оптимальное управление технологическими процессами / А.М. Цирлин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.
6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 313 с.
7. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Физматгиз, 1979. – 381 с.
8. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
9. Филиппов А.П. Колебания механических систем / А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1965. – 718 с.
10. Гробов В.А. Теория колебаний механических систем / В.А. Гробов. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 183 с.
11. Добрынин С.А. Методы автоматизированного исследования вибрации машин: справочник / С.А. Добрынин, М.С. Фельдман, Г.И. Фирсов. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.

Рецензент: А.В. Бажинов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 5 июня 2012 г.