УДК 682.5.015

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

С.Н. Герасин, профессор, д.т.н., Н.А. Матийченко, аспирант,
ХНУРЭ

Аннотация. *Рассмотрена задача оценивания параметров выходного сигнала дискретной линейной динамической системы. Для ее решения строится оценка автокорреляционной функции системы и функции спектральной плотности.*

Ключевые слова: *автокорреляционная функция (АФК), стохастическая динамическая система, оценка параметров выходного сигнала, информационная матрица Фишера.*

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИХІДНОГО СИГНАЛУ СТОХАСТИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

С.М. Герасін, професор, д.т.н., М.О. Матійченко, аспірант,
ХНУРЕ

Анотація. *Розглянуто задачу оцінювання параметрів вихідного сигналу дискретної лінійної динамічної системи. Для її рішення будується оцінка автокореляційної функції системи та функції спектральної щільності.*

Ключові слова: *автокореляційна функція (АФК), стохастична динамічна система, оцінка параметрів вихідного сигналу, інформаційна матриця Фішера.*

EVALUATION OF STOCHASTIC LINEAR SYSTEM INPUT SIGNAL PARAMETERS BASED ON CORRELATIONAL FUNCTION

S. Gerasin, professor, dr. eng. sc., N. Matiichenko, post-graduate student,
KhNURE

Abstract. *This article considers the task of evaluating output signal parameters of a discrete linear dynamic system. The estimation of autocorrelation and spectral density functions are build to solve the task.*

Key words: *autocorrelation function (AFC), stochastic dynamical systems, parameter estimation of the input signal, the Fisher information matrix.*

Введение

Характерной особенностью стохастических моделей динамических систем управления является то, что случайные помехи, как правило, входят в них в виде шума измерителя; эта особенность сильно отражается на процессе построения модели по экспериментальным данным. Определение оценок переменных состояния и параметров, а также их статистических характеристик представляет собой важную и трудно решаемую задачу. В данной статье получены решения некоторых частных задач указанного типа.

Постановка задачи

Пусть дискретная динамическая система описывается в виде линейных дискретных уравнений динамики и измерителя

$$x(t+1) = \Phi(\theta, t+1, t)x(t) + G(\theta, t+1, t)u(t),$$
$$x(0) = 0, \qquad (1)$$

$$y(t+1) = H \cdot x(t+1) + \nu(t+1). \qquad (2)$$

Здесь x – n-мерный вектор переменных состояния системы, u – r-мерный входных сигналов, y – m-мерный вектор наблюдения, $\nu(t+1)$ – белая гауссовская последовательность с нулевым средним и положительно определенной ковариацией.

Пусть мы находимся в рамках описания системы в виде линейной дискретной модели в пространстве состояний (1), (2), без учета помех динамики и нулевом начальном состоянии. Для дальнейших рассуждений $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ – переменные состояния динамики системы стохастического управления с интенсивностью помехи σ_u^2 (входа системы) и наблюдения (выхода измерителя) соответственно; ошибка измерителя предполагается белой гауссовской, с характеристиками $(0,\ \sigma_\nu^2)$; N – число дискретных наблюдений.

Требуется уточнить оценку параметра θ из (1), (2). Пусть для стохастической системы оценка $\hat{\theta}$ – некоторая МНК-оценка для $\theta_{\text{ист}}$. Точность оценки θ в процедуре идентификации можно охарактеризовать детерминантом нормализованной ковариационной матрицы V_N относительно оценки $\hat{\theta}$ с помощью соотношения

$$J_N = \det N \cdot V_N. \qquad (3)$$

Когда $N \to \infty$, требуется определить автокорреляционную функцию (АКФ) стационарной, эргодической входной последовательности $\{u(i),\ \ i = 0,1,2,...,\ \ N-1\}$, которая минимизирует функционал (3) объекта при ограничении мощности помехи и мощности входного сигнала $\sigma_\nu^2 \le \sigma^2$, $\sigma_u^2 \le \sigma_U^2$, где σ_ν^2, σ_u^2 – помехи измерителя и входного сигнала, σ^2, σ_U^2 – допустимые мощности.

Методика решения задачи

Исходные соотношения в динамическом описании объекта сведем к зависимости типа регрессии

$$x(t) = \sum_{j=1}^{t} F^{j-1} \cdot G \cdot u(t-j) \qquad (4)$$

или, подставив (4) в (2), получим

$$y(t) = \sum_{j=1}^{t} H \cdot F^{j-1} \cdot G \cdot u(t-j) + \nu(t),\ \ t = \overline{1,N}. \ (5)$$

Обозначим постоянные множители перед элементарными переменными управления через переменные g_j, т.е.

$$g_j = H \cdot F^{j-1} \cdot G, \quad j = \overline{1,N}.$$

Тогда соотношение (5) запишется в виде

$$y_t = \sum_{j=1}^{t} g_j \cdot u_{t-j} + \nu_t, \quad t = \overline{1,N}. \qquad (6)$$

В соотношении (6) u_t, y_t являются наблюдаемыми входом и выходом соответственно, ν_t – белая гауссовская шумовая последовательность с нулевым средним и дисперсией σ_ν^2. Теперь предположим, что неизвестные импульсы g_j могут быть представлены в следующем виде:

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g_j^{(k)}, \qquad (7)$$

где $g_j^{(k)}$, $k = 1,2,...,n$ являются известными импульсами некоторых простых соотношений; $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$; T – обозначает операцию транспонирования. Для линейной системы (6) МНК – оценки неизвестных параметров есть величины $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n)^T$. Точность в процедуре идентификации формально задается в виде (3) с учетом $\sigma_\nu^2 \le \sigma^2$, $\sigma_u^2 \le \sigma_U^2$. При этом ковариационная матрица ошибки V_N связана с МНК – оценкой $\hat{a}$ и имеет вид

$$V_N = \sigma_\nu^2 \cdot E(x_N^T \cdot x_N)^{-1}, \qquad (8)$$

где E – оператор усреднения, x_N^T есть матрица размера (n*N), для которого (k,t)-й элемент имеет вид

$$x_k^{(t)} = \sum_{j=1}^{t} g_j^{(k)} \cdot u_{t-j},\ t = \overline{1,N}, \ \ k = 1,2,...,n. \qquad (9)$$

Обозначая $N \cdot V_N = W_N^{-1}$, имеем в соответствии с (8)

$$W_N = \frac{1}{\sigma_\nu^2 \cdot N} \cdot E\left(x_N^T \cdot x_N\right) \ . \tag{10}$$

Во-первых, требуется определить выражение для элементов $(W_{k,l}; \ \ k,l = 1,2,...,n)$ матрицы W_N в соотношении (10). Используя (7), мы можем записать

$$w_{k,l}^{(N)} = \frac{1}{\sigma_\nu^2 \cdot N} \cdot E\left(\sum_{t=1}^{N} x_k^{(t)} \cdot x_l^{(t)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_\nu^2 \cdot N} \cdot E\left(\sum_{t=1}^{N}\sum_{p=1}^{t} g_p^{(k)} \cdot u_{t-p} \cdot \sum_{m=1}^{1} g_m^{l} \cdot u_{t-m}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_\nu^2 \cdot N} \cdot E\left(\sum_{t=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} g_p^{(k)} g_m^{(l)} \cdot \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u_{t-p} u_{t-m}\right). \tag{11}$$

Для $N \to \infty$ относительно эргодической и стационарной входной последовательности из (11) мы получим

$$w_{k,l}^{(N)} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2} \cdot E\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} g_p^{(k)} \cdot g_m^{(l)} \cdot r_{(u)}(s)\right), \tag{12}$$

где $r_u(s)$, $(s = p - m)$, σ_u^2 являются нормализованной АКФ и вариацией исходного процесса соответственно. Пусть $\lim\limits_{N\to\infty} w_N^{-1} = w^{-1}$, тогда мы имеем

$$\det \ w = \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2}\right) \cdot n \cdot \det \ \xi, \tag{13}$$

где (k,l)-й элемент $h_{k,l}$ матрицы H есть

$$\xi_{k,l} = E\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} g_p^{(k)} \cdot g_m^{(l)} \cdot r_u(s)\right). \tag{14}$$

В результате всех вышеприведенных рассуждений, задача оптимизации состоит в том, чтобы найти АКФ входного процесса, которая максимизирует (13), или иначе формально это можно записать в виде

$$\max_{r_u(s)} \ \det \ \xi, \tag{15}$$

для $\sigma_u^2 = r_u(0) = \sigma^2$, связанной с ограничением $\sigma_\nu^2 \le \sigma^2$, $\sigma_u^2 \le \sigma_U^2$.

Решение данной задачи позволяет получить оптимальную АКФ $r_u^*(s)$ входного процесса.

Пусть мы находимся в рамках постановки задачи планирования входного сигнала, когда система описывается соотношениями (1), (2). Для оценивания параметров θ будем использовать критерий D-оптимальности

$$J = \det \mathrm{M},$$

где М – информационная матрица Фишера, которая выражается следующим образом:

$$\mathrm{M} = -E\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\theta \cdot \partial\theta^T}\right\}, \tag{16}$$

где L – так называемая функция правдоподобия [2]; $E\{\cdot\}$ – оператор усреднения по пространству выборок при приближенно заданной оценке параметров θ.

Если поделить М на число опытов, то получим нормированную информационную матрицу плана, которая при соблюдении условия некоррелированности откликов во времени играет в процедуре планирования эксперимента роль $\mathrm{M}\{\varepsilon\}$ плана ε [2].

В [1] показано, что только представление соотношений (1), (2) в форме уравнений дискретного фильтра Калмана идентифицируемо. Такое обобщение мы вправе сделать, исходя из однозначного взаимоперехода между дискретной и непрерывной моделью. Исходя из этого, оценку предсказания по Калману-Бьюси-Острему [2] определим в виде

$$\hat{x}(t) = E\left[x(t) \middle| y(1),..., y(t-1)\right]; \tag{17}$$

$$\gamma(t) = (H \cdot P \cdot H^T + R)^{-\frac{1}{2}} \cdot (y(t) - H \cdot \hat{x}(t)); \tag{18}$$

$$P = \left[\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) \cdot \left(x(t) - \hat{x}(t)\right)^T\right]. \tag{19}$$

Тогда соотношения для модели динамики (1) и измерителя (2) с учетом (17), (18) можно записать в виде

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \cdot \hat{x}(t) + G \cdot u(t) + K \cdot \gamma(t), \tag{20}$$

$$y(t) = H \cdot \hat{x}(t) + \sum \cdot \gamma(t), \tag{21}$$

где $$\sum = \left(H \cdot P \cdot H^T + R\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Выражение (23) с учетом (27) запишется как

$$\gamma(t) = \sum^{-1} \cdot \left(y(t) - H \cdot \hat{x}(t)\right). \qquad (23)$$

Далее

$$K = \Phi \cdot P \cdot H^T \cdot \sum^{-1}; \qquad (24\ \text{а})$$

$$P = \Phi \cdot P \cdot \Phi^T - K \cdot K^T + \Gamma \cdot Q \cdot \Gamma^T. \ (24\ \text{б})$$

Дальше получим

$$z_n \cdot \tilde{x}(n) - K \cdot \tilde{\gamma}(n) = \Phi \cdot \tilde{x}(n) + G \cdot \tilde{u}(n); \ (25)$$

$$\tilde{y}(n) = H \cdot \tilde{x}(n) + \sum \cdot \gamma(n), \qquad (26)$$

где $$n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

и $$z_n = e^{-j \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N}} = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N}\right);$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N}}.$$

Здесь $\tilde{x}(n)$ обозначает компоненту ряда Фурье для $x(t)$ с частотой $\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N}$ и, соответственно, для других переменных. Из (25) и (26) следует

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= H \cdot (z_n I - \Phi)^{-1} \Pi \cdot \tilde{u}(n) + \\ &+ \left[H \cdot (z_n \cdot I - \Phi)^{-1} \cdot K + \sum\ \right] \cdot \tilde{\gamma}(n) = \\ &= T_1 z(n, \theta) \cdot \tilde{u}(n) + T_2(z_n, \theta) \cdot \tilde{\gamma}(n), \qquad (27) \end{aligned}$$

где $$T_1(z_n, \theta) = H \cdot (z_n \cdot I - \Phi)^{-1} \cdot G; \qquad (28)$$

$$T_2(z_n, \theta) = H \cdot (z_n \cdot I - \Phi)^{-1} \cdot K + \Sigma. \ (29)$$

Логарифм функции правдоподобия $L(\theta)$ может быть записан как

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -\frac{N}{2} \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\gamma}^*(n) \cdot \tilde{\gamma}(n) - N \times \\ &\times \log\left|\sum\ \right| - \frac{N}{2} \cdot \log(2 \cdot \pi). \end{aligned}$$

Элементы информационной матрицы Фишера определяются из выражения

$$M_{ij} = -E_{Y|\theta}\left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j}\right]_{\theta=\theta_0}, \ i, j = \overline{1, m}, \quad (30)$$

где математическое ожидание берется относительно пространства наблюдений (выборок) $Y(t) = \{y(t);\ \ t = \overline{0, N}\}$ и θ_0, которое является априорной оценкой параметра θ. Из (30) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= -N \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} \left[\tilde{\gamma}^*(n) \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}(n)}{\partial \theta_i}\right] - \\ &- N \cdot tr\left[\sum^{-1} \cdot \frac{\partial \sum}{\partial \theta_i}\right]. \end{aligned}$$

Теперь получим соотношение для второй производной от функции правдоподобия

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j} &= -N \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{\partial \gamma^*(n)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \gamma(n)}{\partial \theta_j}\right] - \\ &- N \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \gamma^*(n) \left[\frac{\partial^2 \gamma(n)}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j}\right] + \\ &+ N \cdot tr\left(\sum^{-1} \cdot \frac{\partial \sum}{\partial \theta_j} \cdot \sum^{-1} \cdot \frac{\partial \sum}{\partial \theta_i}\right) - \\ &- N \cdot tr\left(\sum^{-1} \cdot \frac{\partial^2 \sum}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j}\right). \end{aligned}$$

Выводы

В статье получен метод решения задачи активной идентификации во временной области на основе оптимизации автокорреляционной функции (АКФ) входного сигнала. Для частного представления модели динамики, например, в виде регрессионной модели, поставлена и предложена методика решения задачи активной идентификации на основе оптимизации АКФ.

Литература

1. Kailath R.K. An innovation approach to least-squares estimation // IEEE Trans. Automatic Control. Dec. – 1968. – Vol. 13. – №6. – P. 645–655.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 684 с.

Рецензент: О.П. Алексеев, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2009 р.