

УДК 621.8

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ ВИЛОЧНОГО АВТОПОГРУЗЧИКА

**И.А. Нефёдов, ст. преподаватель,  
Приазовский государственный технический университет, г. Мариуполь**

*Аннотация.* Разработана математическая модель колебаний вилочного автопогрузчика в условиях работы морских портов Украины.

*Ключевые слова:* автопогрузчик, собственные колебания, вынужденные колебания, динамическая модель.

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОЛИВАНЬ ВИЛКОВОГО АВТОНАВАНТАЖУВАЧА

**І.О. Нефьодов, ст. викладач,  
Приазовський державний технічний університет, м. Маріуполь**

*Анотація.* Розроблено математичну модель коливань вилкового автонавантажувача в умовах роботи морських портів України.

*Ключові слова:* автонавантажувач, власні коливання, змушені коливання, динамічна модель.

## DEVELOPING A MATHEMATICAL MODEL OF FORK-LIFT LOADER VIBRATIONS

**I. Nefyodov, Assistant Professor,  
Pryazovskiy State Technical University, Mariupol**

*Abstract.* A mathematical model of fork-lift loader vibrations in Ukrainian seaports has been developed.

*Key words:* fork-lift loader, natural vibrations, forced vibrations, dynamic model.

### Введение

В условиях эксплуатации погрузчиков в морских портах Украины возникает необходимость уменьшения количества поломок в результате выхода из строя рам грузоподъемника. Проблема повышения эксплуатационной надежности в работе погрузчиков зависит от снижения динамических нагрузок, возникающих в грузоподъемном механизме при движении по неровностям пути. В связи с этим актуальной является проблема разработки динамической модели автопогрузчика для исследования влияния колебаний на грузоподъемник при различных условиях экс-

плуатации.

### Анализ публикаций

Анализ последних исследований и публикаций показал, что в настоящее время большое внимание уделяется вопросам повышения эффективности работы короткобазовых колесных погрузчиков с бортовой системой поворота и модульных строительных и дорожных машин [1, 2]. Однако в условиях работы морских портов используются универсальные автопогрузчики грузоподъемностью 1,5–42 т с вертикальным грузоподъемным механизмом (наклонным или с кареткой, имеющей возможность наклона вил), влия-

ние возникающих в системе колебаний на динамику которых ранее не рассматривалось.

### Цель и постановка задачи

Разработка динамической модели, учитывающей собственные и вынужденные колебания.

### Разработка математической модели колебаний вилочного автопогрузчика

Автопогрузчик представляет собой систему упруго связанных тел (рис. 1).

На данной схеме тело I схематически представляет собой автопогрузчик массой  $M$ , осевой момент инерции которой относительно оси, проходящей через центр масс  $J_{c_y}$ , учитывает геометрические формы всех масс автопогрузчика. Тело II – II' – колёса, массы которых сосредоточены и находятся на упругих связях, имеющих коэффициент жёсткости, равный радиальной жёсткости шин этих колёс.

Примем, что начало координат находится в начальном статическом положении центра масс; упругие связи в этом положении имеют статические деформации.

Движение данной системы в процессе колебаний характеризуется тремя обобщёнными координатами:  $q_1 = z$  – вертикальное перемещение центра тяжести автопогрузчика;  $q_2 = \varphi_y$  – угол поворота машины относи-

тельно поперечной оси;  $q_3 = \varphi_x$  – угол поворота машины относительно продольной оси. С учётом того, что распределение масс автопогрузчика и жесткостей упругих связей симметрично относительно срединной продольной плоскости, движение данной механической системы описываем первыми двумя координатами:  $q_1 = z$  и  $q_2 = \varphi_y$ .

На движение автопогрузчика наибольшее воздействие оказывают колебания в продольно-вертикальной плоскости. При этом выделяются наиболее характерные режимы движения:

- движение по неровностям горизонтального участка дороги;
- фронтальный наезд передними колёсами на препятствие.

Особенностью фронтальных автопогрузчиков является наличие у них вертикального грузоподъёмника, который позволяет поднимать груз вертикально и препятствует его горизонтальному перемещению.

Это обстоятельство учитывается при разработке динамической модели автопогрузчика, считая, что груз находится в самом верхнем наиболее неблагоприятном положении (рис. 2).

Чтобы предложенная динамическая модель соответствовала реальной машине, приняты три базовых утверждения [3]:

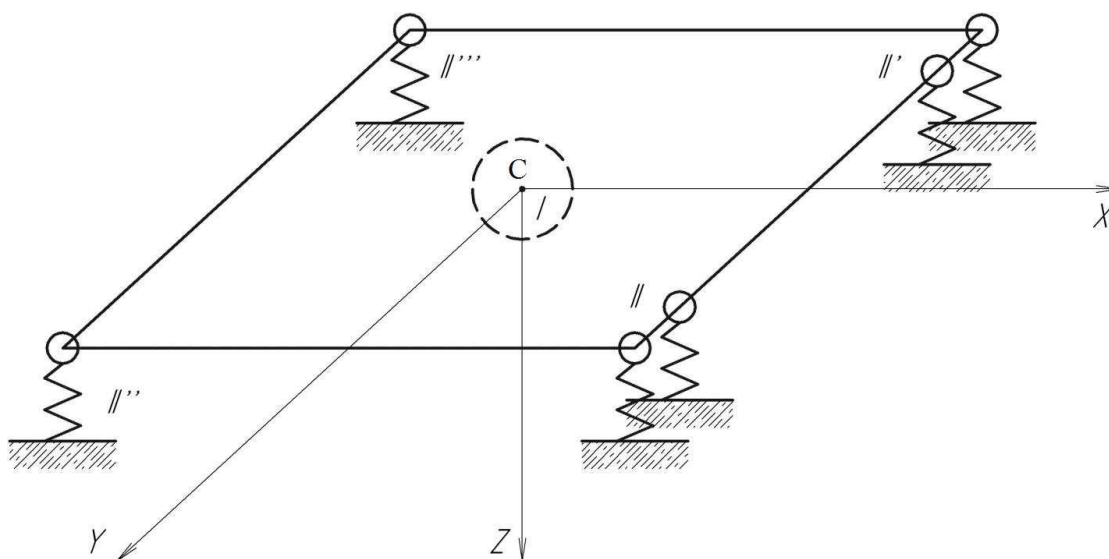


Рис. 1. Система упруго связанных тел

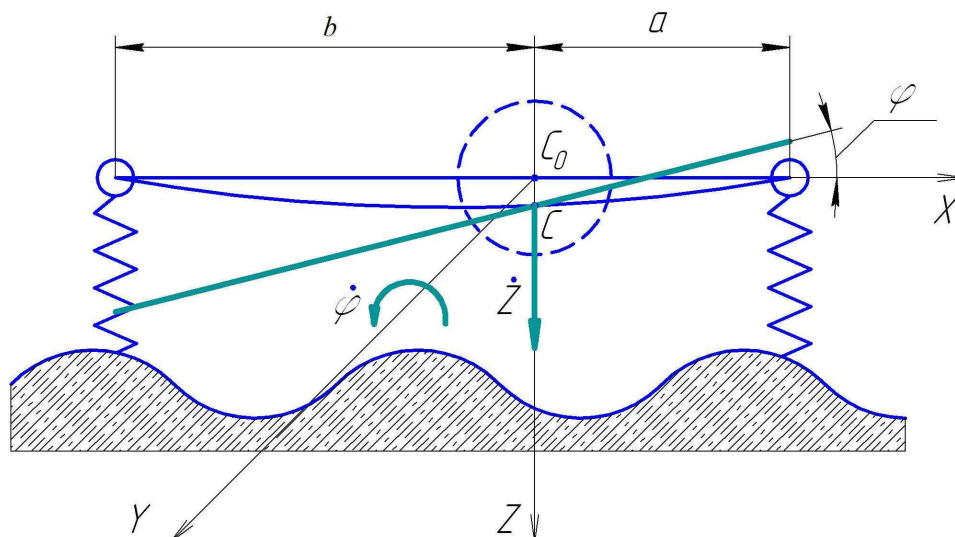


Рис. 2. Расчётная схема несущей системы автопогрузчика

1. Кинетическая энергия автопогрузчика должна быть равна кинетической энергии модели.

$$OC = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad M = \sum_{i=1}^{10} m_i. \quad (1)$$

2. Потенциальная энергия масс и упругих связей автопогрузчика должна быть равна потенциальной энергии модели.

Точку  $O$  помещаем на пересечение осей задних колес и оси симметрии машины.

3. Обобщенные непотенциальные силы находятся из утверждения: возможная работа конкретной силы равна сумме возможных работ непотенциальных сил на заданном соответствующем возможном перемещении.

Момент инерции автопогрузчика относительно ее центральной оси определен как сумма моментов инерции масс, из которых состоит автопогрузчик.

$$J_{C_y \Sigma} = \sum_{i=1}^{10} J_{C_y}^{(i)}. \quad (2)$$

Согласно расчетной схеме (рис. 3) координата центра масс автопогрузчика вдоль продольной оси  $OX$  определяется [4]

Момент инерции каждой массы относительно оси  $C_y$  определен согласно [4]

$$J_{C_y}^{(i)} = J_{C_i} + m_i (C_i C)^2. \quad (3)$$

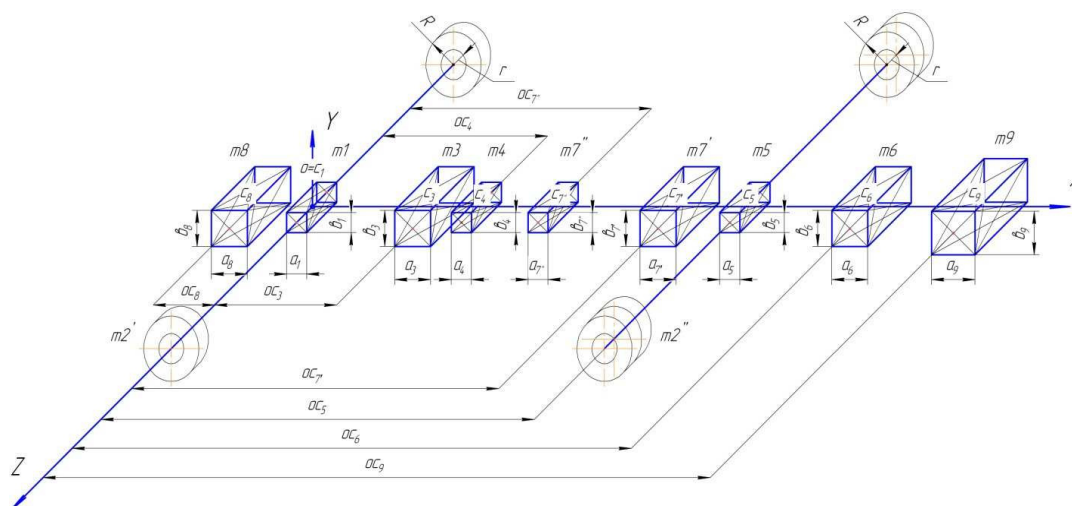


Рис. 3. Расчётная схема для определения положения центра масс и момента инерции  
Для тел 1, 3 – 8

$$J_{C_i} = \frac{1}{12} m_i (a_i^2 + b_i^2), \quad (4)$$

где  $a_i^2, b_i^2$  – размеры тел по осям  $x$  и  $z$  соответственно.

Осевые моменты колёс относительно собственных осей

$$J_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 (r_\zeta^2 + R^2) \quad J_{C_2'} = \frac{1}{2} m_2 (r_i^2 + R_i^2), \quad (5)$$

где  $R$  – наружный радиус колеса погрузчика, м;  $r$  – радиус диска колеса, м.

Движение по неровностям горизонтального участка дороги характеризуется возникновением собственных и вынужденных колебаний автопогрузчика.

Дифференциальные уравнения движения автопогрузчика описаны с помощью уравнения Лагранжа II рода [4] и имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{\mathcal{Z}}} \right) - \frac{dT}{dz} = - \frac{d\Pi}{dz} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{\Phi}} \right) - \frac{dT}{d\varphi} = - \frac{d\Pi}{d\varphi} \end{cases}, \quad (6)$$

где  $T$  – кинетическая энергия механической системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия.

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathcal{Z}}^2 + \frac{1}{2} J_\Sigma \dot{\Phi}^2, \quad (7)$$

где  $M$  – приведенная масса автопогрузчика, кг;  $J_\Sigma$  – момент инерции машины относительно поперечной оси  $y$ , проходящей через центр масс;  $\mathcal{Z}$  – обобщенная скорость центра масс вдоль оси  $z$ , м/с;  $\Phi$  – обобщенная угловая скорость вокруг оси  $C_y$ , 1/с.

Потенциальная энергия машины состоит из потенциальной энергии силы тяжести и потенциальной энергии деформации шин, коэффициенты жесткостей которых обозначены  $C_n, C_3$ .

Учитывая, что при равновесии машины  $\frac{d\Pi}{dz} \Big|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = 0$ , потенциальная энергия в текущий момент времени примет вид

$$\Pi = \frac{C_n}{2} (z - a\varphi)^2 + \frac{C_3}{2} (z + b\varphi)^2. \quad (8)$$

На основании вывода производных, входящих в уравнения (6), определены дифференциальные уравнения собственных колебаний автопогрузчика

$$\begin{cases} M \ddot{z} + z(C_n + C_3) + \varphi(C_3 b + C_n a) = 0 \\ J_\Sigma \ddot{\Phi} + z(C_3 b - C_n a) + \varphi(C_n a^2 + C_3 b^2) = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Частные решения дифференциальных уравнений (9) имеют вид

$$\begin{cases} z = A_1 \sin kt \\ \varphi = A_2 \cos kt \end{cases}. \quad (10)$$

Подставляя уравнение (10) в (9), определено уравнение частот собственных колебаний, на основании которого получены квадраты собственных частот

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 = & \frac{M(c_n a^2 + c_3 b^2) + I_\Sigma(c_n + c_3)}{2I_\Sigma M} \pm \\ & \pm \sqrt{\frac{[M(c_n a^2 + c_3 b^2) + I_\Sigma(c_n + c_3)]^2 -}{2I_\Sigma M} -} \\ & \frac{-4I_\Sigma M c_n c_3 (a + b)^2}{2I_\Sigma M} \end{aligned} \quad (11)$$

Случай кинематического возмущения при профиле дороги описан уравнением [5]

$$z_{\text{дороги}} = z_1 = h \sin \frac{\pi v t}{l}, \quad (12)$$

где  $h$  – глубина впадины, м;  $v$  – скорость автопогрузчика, м/с;  $l$  – длина одной волны, м. В рассматриваемом случае потенциальная энергия системы, с учётом условий равновесия автопогрузчика, в текущем ее положении имеет вид

$$\Pi = \frac{C_n}{2}(z - a\varphi - z_1)^2 + \frac{C_3}{2}(z + b\varphi - z_1)^2. \quad (13)$$

Формула для кинетической энергии не изменилась. Входящие в уравнения Лагранжа второго рода производные от потенциальной энергии равны

$$\frac{d\Pi}{dz} = C_n(z - a\varphi - z_1) + C_3(z + b\varphi - z_1); \quad (14)$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = -C_n(z - a\varphi - z_1)a + b(C_3(z + b\varphi - z_1)). \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения движения в этом случае

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}\dot{z} + c_{11}\varphi = H_1 \sin(\omega t) \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}\dot{z} + c_{22}\varphi = H_2 \sin(\omega t) \end{cases}, \quad (16)$$

где  $a_{ij}$  – коэффициенты инерции;  $c_{ij}$  – коэффициенты жесткости.

Частные решения дифференциальных уравнений (16), определяющие вынужденные колебания автопогрузчика, представлены в виде [5]

$$z = A_z \sin(\omega t + \alpha), \quad (17)$$

$$\varphi = A_\varphi \sin(\omega t + \alpha). \quad (18)$$

Подставив частные решения в систему дифференциальных уравнений движения, определено

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A_z + c_{12}A_\varphi = H_1 \\ c_{12}A_z + (c_{22} - a_{22}\omega^2)A_\varphi = H_2 \end{cases}. \quad (19)$$

В результате решения данной системы уравнений выведены формулы для определения амплитуд вынужденных колебаний

$$A_z = \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega^2) - H_2c_{12}}{\Delta_{\text{гл}}}, \quad (20)$$

$$A_\varphi = \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega^2) - H_1c_{12}}{\Delta_{\text{гл}}}, \quad (21)$$

$$\Delta_{\text{гл}} = J_\Sigma M \omega^4 -$$

$$- \left[ M(C_n a^2 + C_3 b^2) + J_\Sigma(C_n + C_3) \right] \omega^2 + C_n C_3 (a + b)^2. \quad (22)$$

Следовательно

$$A_z = \frac{h}{\Delta_{\text{гл}}} \left[ C_n C_3 (a + b)^2 - J_\Sigma \omega^2 \right], \quad (23)$$

$$A_\varphi = \frac{h}{\Delta_{\text{гл}}} \left[ M \omega^2 (C_n a - C_3 b) \right]. \quad (24)$$

Учитывая, что знаменатель в формулах амплитуд вынужденных колебаний  $A_z$  и  $A_\varphi$  является квадратным многочленом относительно  $\omega^2$ , а корнями этого многочлена являются квадраты частот собственных (главных) колебаний системы  $k_1^2$  и  $k_2^2$  (11), выражения (23, 24) для амплитуд вынужденных колебаний будут представлены в виде [5]

$$A_z = \frac{h \left[ C_n C_3 (a + b)^2 - J_\Sigma \omega^2 \right]}{J_\Sigma M (\omega^2 - k_1^2)(\omega^2 - k_2^2)}, \quad (25)$$

$$A_\varphi = \left| \frac{h \left[ M \omega^2 (C_n a - C_3 b) \right]}{J_\Sigma M (\omega^2 - k_1^2)(\omega^2 - k_2^2)} \right|. \quad (26)$$

При  $\omega = k_1$  или  $\omega = k_2$  амплитуды колебаний с течением времени неограниченно возрастают, т.е. возникает резонанс. Если  $\frac{\pi}{l} = \frac{k_1}{v}$  или  $\frac{\pi}{l} = \frac{k_2}{v}$ , создается опасный режим движения автопогрузчика.

Амплитуды вынужденных колебаний в случае резонанса увеличиваются до бесконечности при условии, что отсутствует рассеяние энергии, обусловленное демпфированием. В случае так называемого вязкого демпфирования максимальная амплитуда вынужденных колебаний даже при резонансе имеет конечную величину [6]. Для системы с одной степенью свободы имеем

$$A_{\text{max}} = \frac{H}{\beta \omega}, \quad (27)$$

где  $H$  – амплитуда возмущающей силы;  $\beta$  – обобщенный диссипативный коэффициент.

Коэффициент динамичности системы

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha k} \frac{\omega}{k}\right)^2}}, \quad (28)$$

где  $\alpha$  – обобщенный коэффициент инерции. График зависимости коэффициента динамичности от отношения частот  $\frac{\omega}{k}$  [6] показывает, что при  $\omega = k$  и  $\omega \neq k$  демпфирование оказывает второстепенное влияние на коэффициент динамичности. Таким образом, в обоих указанных случаях вынужденных колебаний вполне допустимо полностью пренебречь демпфированием и использовать решения, полученные выше (25, 26).

### Выводы

1. Разработаны расчетные схемы несущей системы автопогрузчика, определения центра масс и момента инерции автопогрузчика.
2. Исследовано воздействие собственных колебаний автопогрузчика на грузоподъемный орган и выведены уравнения частот собственных колебаний.
3. В условиях движения автопогрузчика по неровностям дорожного покрытия разработан вывод амплитуд вынужденных колебаний, обоснованный расчетом коэффициента динамичности.
4. Перспектива дальнейших исследований заключается в исследовании воздействия колебаний на грузоподъемник при фронталь-

ном наезде передних колес автопогрузчика на препятствие.

### Литература

1. Разарьонов Л.В. Підвищення ефективності роботи короткобазових колісних навантажувачів з бортовою системою повороту: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.05.04 «Машини для земляних, дорожніх і лісотехнічних робіт» / Л.В. Разарьонов. – Х., 2011. – 22 с.
2. Кириченко І.Г. Принципи ефективного формування модульних будівельних і дорожніх машин: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.05.04 «Машини для земляних, дорожніх і лісотехнічних робіт» / І.Г. Кириченко. – Х., 2012. – 36 с.
3. Зиновьев В.А. Основы динамики машинных агрегатов / В.А. Зиновьев, А.П. Бессонов. – М.: Машиностроение, 1964. – 239 с.
4. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. Ч.2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 595 с.
5. Яблонский А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Рецензент: Л.А. Хмара, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 27 июня 2012 г.