

## ИНДУКЦИОННАЯ ИНДУКТОРНАЯ СИСТЕМА С КРУГОВЫМ ВИТКОМ ИНДУКТОРА. РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Ю.В. Батыгин, профессор, д.т.н., А.В. Гнатов, доцент, к.т.н.,  
Щ.В. Аргун, аспирант, ХНАДУ

*Аннотация.* Рассматривается симметричная индукционная индукторная система с идентичными ферромагнитными тонкостенными экраном и листовой заготовкой. Получены основные аналитические зависимости для расчета основных электродинамических характеристик – компонент вектора электромагнитного поля, возбуждаемого в металле ферромагнитных экрана и листовой заготовки для симметричной индукционной индукторной системы.

*Ключевые слова:* индукционная индукторная система, магнитное поле, листовая заготовка, ферромагнитный экран.

## ИНДУКЦІЙНА ІНДУКТОРНА СИСТЕМА З КРУГОВИМ ВИТКОМ ІНДУКТОРА. РОЗРАХУНОК ОСНОВНИХ ПАРАМЕТРІВ

Ю.В. Батигін, професор, д.т.н., А.В. Гнатов, доцент, к.т.н.,  
Щ.В. Аргун, аспірант, ХНАДУ

*Анотація.* Розглядається симетрична індукційна індукторна система з ідентичними феромагнітними тонкостінними екраном і листовою заготовкою. Отримано основні аналітичні залежності для розрахунку основних електродинамічних характеристик - компонент вектора електромагнітного поля, порушеного в металі феромагнітних екрана і листової заготовки для симетричної індукційної індукторної системи.

*Ключові слова:* індукційна індукторного система, магнітне поле, листова заготівки, феромагнітний екран.

## INDUCTION INDUCTOR SYSTEM WITH CIRCULAR COILS OF THE INDUCTOR. CALCULATION OF BASIC PARAMETERS

Yu. Batygin, professor, dr. eng. sc., A. Gnatov, assistant professor, cand. eng. sc.,  
Sch. Argun, post graduate student, KhNAHU

*Abstract.* We consider a symmetric induction inductor system with identical ferromagnetic thin-walled sheet blank screen. The basic analytical relations for calculating the basic electrodynamic characteristics - the components of the electromagnetic field excited in the ferromagnetic metal sheet work-piece screen, and for the symmetric inductor induction system are got.

*Key words:* induction inductor system, magnetic field, sheet work-piece, ferromagnetic screen.

### Введение

На современном этапе технического развития практическое использование энергии импульсных электромагнитных полей открыва-

ет хорошие перспективы для создания и внедрения прогрессивных технологий, основанных на обработке материалов любой физической природы. Особенный интерес представляют системы, позволяющие производить

обработку ферромагнитных металлов. К ним относятся некоторые разновидности индукционных индукторных систем (ИИС).

### Анализ публикаций

На данный момент в лаборатории электромагнитных технологий ХНАДУ разработано несколько видов ИИС, которые требуют проведения дополнительных как аналитических, так и экспериментальных исследований [1–4]. Особенно это относится к симметричным ИИС, т.к. конструктивная и электродинамическая симметрия, феноменологически приводит к более эффективному электромагнитному воздействию данной конструкции инструментов на объект обработки [5].

### Цель и постановка задачи

Получение основных зависимостей для расчёта электродинамических характеристик в цилиндрической ИИС с идентичными ферромагнитными тонкостенными экраном и листовой заготовкой.

### Расчетные соотношения

Практическая работоспособность ИИС определяется её геометрией, электрофизическими, геометрическими характеристиками экрана и заготовки и амплитудно-временными параметрами токового импульса в их взаимосвязи. Для анализа электромагнитных процессов примем расчётную модель в цилиндрической системе координат (рис. 1).

При решении примем такие допущения:

- амплитудно-временные параметры тока индуктора  $I(t)$  таковы, что справедливо квазистационарное приближение по Ландау  $(\omega/c) \cdot \ell \ll 1$ , где  $\omega$  – циклическая частота,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\ell$  – характерный размер системы [6,7];
- плоский виток индуктора имеет цилиндрическую форму ( $R_1, R_2$  – внутренний и внешний радиусы), его толщина пренебрежимо мала, так что металл витка не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы;
- имеет место аксиальная симметрия ( $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ,  $\phi$  – азимутальный угол) и симметрия системы относительно плоскости витка индуктора  $z = 0$ ;

- экран и заготовка – одинаковые листовые металлы с большими поперечными размерами, малой толщиной –  $d$ , электропроводностью –  $\gamma$ , абсолютной магнитной проницаемостью –  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$  ( $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума), они расположены на одном расстоянии от витка –  $h$ .

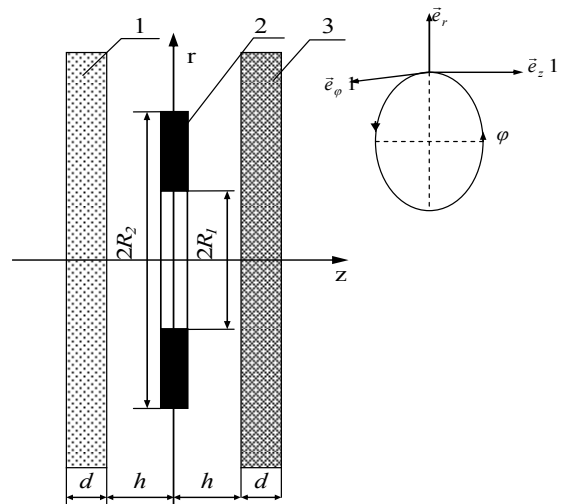


Рис. 1. Расчётная модель в цилиндрической системе координат ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  – направляющие орты, 1 – экран ( $d$  – толщина); 2 – виток индуктора ( $R_1, R_2$  – внутренний и внешний радиусы); 3 – заготовка ( $d$  – толщина);  $h$  – расстояния от витка индуктора до экрана (заготовки)).

Уравнения Максвелла ( $E_\phi \neq 0, H_{r,z} \neq 0$ ) для возбуждаемых составляющих вектора электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, имеют вид [6,7]

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = j_\phi(p, r, z); & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi(p, r, z)) = -\mu_0 p H_z(p, r, z); & (2) \\ \frac{\partial E_\phi(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z); & (3) \end{cases}$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа;  $E_\phi(p, r, z) = L\{E_\phi(t, r, z)\}$ ;  $H_{r,z}(p, r, z) = L\{H_{r,z}(t, r, z)\}$ ;  $j_\phi(p, r, z) = L\{j_\phi(t, r, z)\}$ .

В общем случае плотность тока в правой части (1) записывается в виде

$$j_{\phi}(p, r, z) = (p \cdot \varepsilon_0 + \gamma) E_{\phi}(p, r, z) + j_{\phi i}(p, r, z) \quad (4)$$

где  $j_{\phi i}(t, r, z)$  – плотность стороннего тока в индукторе;  $j_{\phi i}(p, r, z) = j(p) \cdot f(r) \cdot \delta(z)$ ;

$$j(p) = \frac{I(p)}{R_2 - R_1}; I(p) = L\{I(t)\}, f(r) - \text{функ-}$$

ция радиального распределения тока в витке индуктора;  $I(t)$  – ток;  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная.

При решении поставленной задачи в принятой модели следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками. Геометрическая и электродинамическая симметрия данной системы (рис. 1) позволяет считать, что такими являются:

- а) пространство между металлическими листами  $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$ ;
- б) область металла идентичных экрана и заготовки,  $z \in [h, (h + d)]$ ;
- в) свободное полупространство с внешней стороны металлических листов,  $z \in [(h + d), \infty)$ .

Из уравнений (1)÷(3) с учётом выражения (4) в рамках принятых допущений (пренебрегая токами смещения) получим уравнения для азимутальной компоненты напряжённости электрического поля  $E_{\phi}(p, r, z)$  в выделенных областях.

В пространстве между металлическими листами,  $z \in [-h, h]$ , получаем

$$\frac{\partial^2 E_{\phi}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_{\phi}(p, r, z)) \right) = \mu_0 \cdot p \cdot j_{\phi i}(p, r, z); \quad (5)$$

В металле экрана и заготовки,  $z \in [h, (h + d)]$

$$\frac{\partial^2 E_{\phi}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_{\phi}(p, r, z)) \right) - (p \cdot \gamma \cdot \mu) \cdot E_{\phi}(p, r, z) = 0. \quad (6)$$

Вне системы,  $z \in [(h + d), \infty)$

$$\frac{\partial^2 E_{\phi}(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\phi}(p, r, z)) \right) = 0 \quad (7)$$

Условию ограниченности радиального распределения  $E_{\phi}(p, r, z)$  из (5)÷(7) при  $r = 0$  и  $r = \infty$  удовлетворяет интегральное преобразование Фурье-Бесселя

$$E_{\phi}(p, r, z) = \int_0^{\infty} E_{\phi}(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot \lambda \cdot d\lambda, \quad (8)$$

где  $J_1(\lambda \cdot r)$  – функция Бесселя первого порядка [8].

В соответствии с (8) уравнения (5)÷(7) приводятся к обыкновенным уравнениям 2-го порядка для выделенных областей:

а) в пространстве между металлическими листами,  $z \in [-h, h]$

$$\frac{d^2 E_{\phi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 E_{\phi}(p, \lambda, z) = K(p, \lambda) \delta(z), \quad (9)$$

где  $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$ ;

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot r \cdot dr ;$$

б) в металле экрана и заготовки,  $z \in [h, (h + d)]$

$$\frac{d^2 E_{\phi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - q^2(p, \lambda) \cdot E_{\phi}(p, \lambda, z) = 0, \quad (10)$$

где  $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \cdot \mu \cdot \gamma}$  – волновое число в металле с удельной электропроводностью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ ;

в) вне металла листовой заготовки,  $z \in [(h + d), \infty)$

$$\frac{d^2 E_{\phi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_{\phi}(p, \lambda, z) = 0. \quad (11)$$

Общие интегралы уравнений (9)÷(11) для выделенных областей имеют вид:

а) в пространстве между экраном и заготовкой  $z \in [-h, h]$  условию симметрии относи-

тельно плоскости удовлетворяет функция

$$E_{\phi}^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) \cdot ch(\lambda z) + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (\eta(z) \cdot sh(\lambda z) + 0,5 \cdot e^{-\lambda z}), \quad (12)$$

где  $C(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования;

б) в металле экрана и заготовки,  $z \in [h, (h+d)]$

$$E_{\phi}^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)(z-h)} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda)(z-h)}, \quad (13)$$

где  $D_{1,2}(p, \lambda)$  – произвольные постоянные интегрирования;

в) в пространстве вне системы,  $z \in [(h+d), \infty)$ , при  $z \rightarrow \infty$ :

$$E_{\phi}^{(3)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda(z-(h+d))}, \quad (14)$$

где  $B(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования.

Из уравнения (3) с помощью (12)÷(14) находим тангенциальную компоненту напряжённости магнитного поля:

а)  $z \in [-h, h]$ ,

$$H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p\mu_0} \left( C(p, \lambda) sh(\lambda z) + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} (\eta(z) ch(\lambda z) - 0,5 e^{-\lambda z}) \right), \quad (15)$$

б)  $z \in [h, (h+d)]$ ,

$$H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{q(p, \lambda)}{p\mu} (D_1(p, \lambda) e^{q(p, \lambda)(z-h)} - D_2(p, \lambda) e^{-q(p, \lambda)(z-h)}), \quad (16)$$

в)  $z \in [(h+d), \infty)$ ,

$$H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p\mu_0} \cdot B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda(z-(h+d))}. \quad (17)$$

Из условия непрерывности касательных

компонент напряжённости электромагнитного поля на границах выделенных областей получаем системы алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях (12)÷(17) [6,7].

Для  $z = h$ ,

$$\begin{cases} C(p, \lambda) \cdot ch(\lambda h) + \frac{K(p, \lambda)}{2\lambda} \cdot e^{\lambda h} = \\ = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); \\ C(p, \lambda) \cdot sh(\lambda h) + \frac{K(p, \lambda)}{2\lambda} \cdot e^{\lambda h} = \\ = \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} \cdot (D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda)); \end{cases} \quad (18)$$

Для  $z = (h+d)$ ,

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) e^{q(p, \lambda)d} + D_2(p, \lambda) e^{-q(p, \lambda)d} = B(p, \lambda); \\ \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} (D_1(p, \lambda) e^{q(p, \lambda)d} - \\ - D_2(p, \lambda) e^{-q(p, \lambda)d}) = -B(p, \lambda). \end{cases} \quad (19)$$

В конечном итоге нас интересуют поля, возбуждаемые в металле экрана и заготовки, то есть, неизвестные  $D_1(p, \lambda)$  и  $D_2(p, \lambda)$ .

Исключая  $B(p, \lambda)$  в системе линейных уравнений (19), находим что

$$D_1(p, \lambda) = -D_2(p, \lambda) \cdot e^{-2q(p, \lambda)d} \times \left( 1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} \right) / \left( 1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} \right). \quad (20)$$

Из (18) с помощью (20) определяем искомые  $D_1(p, \lambda)$  и  $D_2(p, \lambda)$

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda)}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{F(p, \lambda)} \cdot e^{-2q(p, \lambda)d} \times \\ \times \left( 1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} \right) / \left( 1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda\mu_r} \right); \\ D_2(p, \lambda) = -\frac{K(p, \lambda)}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{F(p, \lambda)}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$F(p, \lambda) = sh(\lambda h) \left[ 1 - e^{-2q(p, \lambda) \cdot d} \frac{\left( 1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right)}{\left( 1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right)} \right] + \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right) ch(\lambda h) \left[ 1 + e^{-2q(p, \lambda) \cdot d} \frac{\left( 1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right)}{\left( 1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right)} \right].$$

Выражения (21) следует подставить в формулы (13) и (16). После тождественных преобразований и обратного преобразования Фурье-Бесселя записываем формулу для  $L$ -изображения напряжённости электрического поля в терминах продольной пространственной переменной, связанной с заготовкой

$$E_{\phi}^{(2)}(p, r, \zeta) = \frac{p \mu_0 j(p)}{2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{G(p, \lambda)} \cdot (sh(q(p, \lambda) \times (\zeta - d)) - \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right) \cdot ch(q(p, \lambda)(\zeta - d))) \times J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (22)$$

где  $\zeta = z - d$ ,  $\zeta \in [0; d]$  – пространственная переменная по толщине пластины,

$$G(p, \lambda) = sh(q(p, \lambda)d) \cdot [sh(\lambda h) + \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right)^2 \times ch(\lambda h)] + ch(q(p, \lambda)d) \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right) e^{\lambda h}.$$

С помощью (2), (3), (22) найдем тангенциальную и нормальную ( $r$ ,  $z$  – составляющие) компоненты напряжённости магнитного поля.

$$H_r^{(2)}(p, r, \zeta) = \frac{j(p)}{2\mu_r} \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda) \cdot q(p, \lambda)}{G(p, \lambda)} [ch(q(p, \lambda) \times (\zeta - d)) - \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right) \cdot sh(q(p, \lambda)(\zeta - d))] \times J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (23)$$

$$H_z^{(2)}(p, r, \zeta) = -\frac{j(p)}{2\mu_r} \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda) \cdot \lambda}{G(p, \lambda)} \cdot [sh(q(p, \lambda) \times (\zeta - d)) - \left( \frac{q(p, \lambda)}{\lambda \mu_r} \right) \cdot ch(q(p, \lambda)(\zeta - d))] \times J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (24)$$

Формулы (22)–(24) представляют собой решение поставленной задачи об определении компонент вектора электромагнитного поля, возбуждаемого в металле ферромагнитных экрана и листовой заготовки. Предельные переходы в (22) и (23) при  $\mu_r \rightarrow 1$  с точностью до обозначений совпадают с выражениями для аналогичных характеристик возбуждаемых полей для немагнитных экрана и заготовки, найденных авторами работы [5].

Выражения (22)–(24) – решение поставленной задачи, записанные в пространстве изображений по Лапласу. Обратное интегральное преобразование и соответствующий переход к оригиналам, как математические операции, можно существенно упростить, рассматривая конкретные физические условия работы исследуемой ИИС. Но, эти вопросы выходят за рамки данной работы.

## Выводы

Получены основные аналитические зависимости для расчета электродинамических характеристик симметричной ИИС с идентичными ферромагнитными тонкостенными экраном и листовой заготовкой. Решения записаны в виде  $L$ -образов компонент вектора возбуждаемого электромагнитного поля.

## Литература

1. Батыгин Ю.В. Расчет электродинамических усилий в индукционной индукторной системе с неферромагнитными массивным экраном и листовой заготовкой / Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов // Электротехника і електромеханіка. – Харків, 2009. – №4. – С. 56 – 59.
2. Батыгин Ю.В. Расчет усилий в индукционной индукторной системе прямоугольной геометрии с неферромагнитными массивным экраном и заготовкой / Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов, Г.С. Сериков // Электротехника і електромеханіка. – Харків, 2009. – №3. – С. 61 – 64.
3. Индукционная индукторная система с одновитковым соленоидом в полости массивного экрана и листовой заготовкой : сборник трудов Международной научно-технической конференции Проблемы электротехники, электроэнергетики и электротехнологии, Тольятти, 12 – 15 мая 2009г. в 3-х ч. / Ю.В. Батыгин,

- А.В. Гнатов, С.А. Драченко. – Тольятти: ТГУ, 2009. – Ч. 1 – С. 26–29.
4. Гнатов А. В. Расчет электромагнитных процессов в индукционной индукторной системе с массивным экраном конечной толщины / А.В. Гнатов // *Электротехніка і електромеханіка*. – Харків, 2009. – №5. – С.59 – 62.
  5. Туренко А.Н. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 3. Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями: монографія / А.Н. Туренко, Ю.В. Батыгин, А.В. Гнатов. – Харків: ХНАДУ, 2009 – 240 с.
  6. Ландау Л.Д. Теория поля / Л. Ландау, Е. Лифшиц. – М : Наука, 1973. – 502с.
  7. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Ландау, Е. Лифшиц. – М: Наука, 1982. – 620с.
  8. Мэтьюз Дж. Математические методы физики Пер. с англ. Крайнова В.П. / Дж. Мэтьюз – М: Атомиздат, 1972. – 399 с.
- Рецензент: А.В. Бажинов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.
- Статья поступила в редакцию 15.09.2011 г.